Examen de fin d'études secondaires 2016

Sections C et D Mathématiques 2 Corrigé

EXERCICE 1 :

a) 1) $2e^{-x}-12e^{x}=5 \;\Big|\cdot e^{x} \qquad D=\mathbb{R}$

4 $\Leftrightarrow 2-12e^{2x}=5e^{x} \qquad$ posons $e^{x}=y$

$\Leftrightarrow 12y^{2}+5y-2=0 \qquad \Delta=121$

$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}$ ou $y=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{x}=-\frac{2}{3}}_{\text{impossible}}$ ou $e^{x}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=-\ln 4 \qquad S=\{-\ln 4\}$

2) $\log_{5}(1+x)-\log_{\sqrt{5}}(1-2x)\geq \log_{\frac{1}{5}}(3+4x) \qquad (I)$

C.E.: $1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$

1 $\quad 1-2x>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \qquad D_{(I)}=\left]\frac{-3}{4};\frac{1}{2}\right[$

$3+4x>0 \Leftrightarrow x>\frac{-3}{4}$

Pour $x\in D_{(I)}$:

$(I) \Leftrightarrow \log_{5}(1+x)-2\log_{5}(1-2x)\geq -\log_{5}(3+4x)$

5 $\Leftrightarrow \log_{5}(1+x)+\log_{5}(3+4x)\geq 2\log_{5}(1-2x)$

$\Leftrightarrow \log_{5}(1+x)(3+4x)\geq \log_{5}(1-2x)^{2}$

$\Leftrightarrow (1+x)(3+4x)\geq (1-2x)^{2}$ car $\log_{5}$ est strict. $\nearrow$

$\Leftrightarrow 3+7x+4x^{2}\geq 1-4x+4x^{2}$

$\Leftrightarrow 11x\geq -2 \Leftrightarrow x\geq \frac{-2}{11} \qquad S=\left[\frac{-2}{11};\frac{1}{2}\right[$

4 b) 1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\left(3+\cos(2x)\right)^{2}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3+\cos(2x)\right)^{-2}\cdot\sin(2x)\,dx=\frac{-1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\left(3+\cos(2x)\right)}_{u(x)}{}^{-2}\cdot\underbrace{(-2)\sin(2x)}_{u'(x)}dx$

$$=\left[-\tfrac{-1}{2}\left(3+\cos(2x)\right)^{-1}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{1}{2\left(3+\cos(2x)\right)}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

4 2) $\displaystyle\int\frac{3}{\sqrt{9-4x^{2}}}dx=\int\frac{3}{3\sqrt{1-\frac{4x^{2}}{9}}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^{2}}}dx=\frac{3}{2}\int\frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^{2}}}dx=\frac{3}{2}\,Arc\sin\left(\frac{2x}{3}\right)+c$

EXERCICE 2 :

a) $f(x) = x^2 \cdot ln\left(\frac{x}{4}\right)$

0,5 • C.E. $\frac{x}{4} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Donc $\underline{\text{dom } f = \text{dom } f' = \mathbb{R}_+^*}$

1 • $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{x}{4}\right)}_{\to+\infty}}_{\to+\infty} = +\infty$. C_f n'admet <u>pas d'asymptote horizontale</u>.

Recherche d'une asymptote oblique éventuelle :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{x}{4}\right)}_{\to+\infty} = +\infty$. C_f n'admet <u>pas d'asymptote oblique</u>.

2,5 $$\lim_{x\to0} \underbrace{x^2}_{\to0^+} \cdot \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{x}{4}\right)}_{\to0^+}}_{\to-\infty} = \lim_{x\to0} \frac{\ln\left(\frac{x}{4}\right)\Big\}\to-\infty}{x^{-2}\Big\}\to+\infty} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to0} \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{4}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}\cdot x^3}{-2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

$f.i.$ "$0\cdot\infty$" $\qquad f.i.$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

C_f n'admet <u>pas d'asymptote verticale</u>.

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad f'(x) = 2x\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right) + x^2\cdot\frac{1}{x} = \underline{2x\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right) + x} = \underbrace{x}_{>0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}\cdot\left[2\ln\left(\frac{x}{4}\right)+1\right]$

3 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)+1>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) > \frac{-1}{2}$ $\quad\Big|\ \mathrm{e}^{(\,)}$ strict. ↗

$\Leftrightarrow \frac{x}{4} > e^{\left(\frac{-1}{2}\right)} \Leftrightarrow x > \frac{4}{\sqrt{e}} \approx 2,4$

x	0		$\frac{4}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$

• $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:

$f''(x) = 2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right) + 2x\cdot\frac{1}{x} + 1 = \underline{2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)+3}$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)+3>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{4}\right) > \frac{-3}{2}$ $\quad\Big|\ \mathrm{e}^{(\,)}$ strict. ↗

3 $\Leftrightarrow \frac{x}{4} > e^{\left(\frac{-3}{2}\right)} \Leftrightarrow x > \frac{4}{\sqrt{e^3}} \approx 0,9$

x	0		$\frac{4}{\sqrt{e^3}}$	
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$

- $f\left(\dfrac{4}{\sqrt{e^3}}\right)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{e^3}}\right)^2\cdot ln\left(e^{\frac{-1}{2}}\right)=\dfrac{16}{e^3}\cdot\dfrac{-3}{2}=\dfrac{-24}{e^3}\approx-1{,}2$. C_f admet un <u>point d'inflexion</u> $\underline{I\left(\dfrac{4}{\sqrt{e^3}}\,;\dfrac{-24}{e^3}\right)}$

<u>*1*</u> $f\left(\dfrac{4}{\sqrt{e}}\right)=\left(\dfrac{4}{\sqrt{e}}\right)^2\cdot ln\left(e^{\frac{-1}{2}}\right)=\dfrac{16}{e}\cdot\dfrac{-1}{2}=\dfrac{-8}{e}\approx-2{,}9$. f admet un <u>minimum</u> de $\underline{\dfrac{-8}{e}}$ pour $x=\dfrac{4}{\sqrt{e}}$.

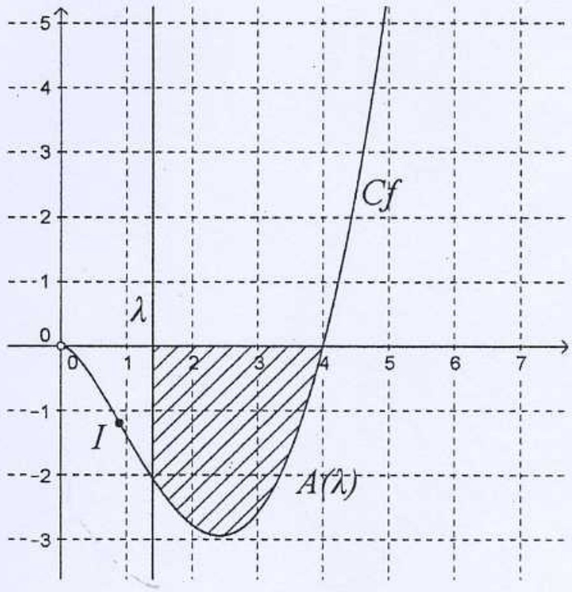
<u>*2*</u>

x	0		$\frac{4}{\sqrt{e^3}}$		$\frac{4}{\sqrt{e}}$		
$f'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$\frac{-24}{e^3}$	$\searrow$	$\frac{-8}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

- Représentation graphique

<u>*3*</u>

x	$f(x)$
0,5	-0,52
1	-1,39
2	-2,77
3	-2,59
4	0
5	5,58



b) $A(\lambda) = -\int_\lambda^4 x^2 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)dx = \int_4^\lambda x^2 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)dx$ <u>intégration par parties :</u> Posons :

$u(x) = \ln\left(\dfrac{x}{4}\right)$ et $v'(x) = x^2$

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)\right]_4^\lambda - \int_4^\lambda \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx$$

$$= \frac{\lambda^3}{3}\cdot\ln\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{4^3}{3}\cdot\ln\left(\frac{4}{4}\right) - \frac{1}{3}\int_4^\lambda x^2 dx$$

4 $$= \frac{\lambda^3}{3}\cdot\ln\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{64}{3}\cdot 0 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_4^\lambda = \frac{\lambda^3}{3}\cdot\ln\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\lambda^3}{9} + \frac{4^3}{9} = \underline{\frac{\lambda^3}{3}\cdot\ln\left(\frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\lambda^3}{9} + \frac{64}{9}}$$

$A = \lim\limits_{\lambda\to 0} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to 0} \dfrac{\lambda^3}{3}\cdot\ln\left(\dfrac{\lambda}{4}\right) - \dfrac{\lambda^3}{9} + \dfrac{64}{9}$ séparément $\lim\limits_{\lambda\to 0} \underbrace{\underbrace{\dfrac{\lambda^3}{3}}_{\to 0}\cdot\ln\underbrace{\left(\dfrac{\lambda}{4}\right)}_{\to 0}}_{\to -\infty}$ $f.i.$ "$0\cdot\infty$"

2

$$= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{\lambda}{4}\right)}{3\lambda^{-3}} \quad f.i. \text{ "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-9\lambda^{-4}} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda^4}{-9\lambda} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{\lambda^3}{-9} = 0$$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\frac{\lambda^3}{3}\cdot\ln\left(\frac{\lambda}{4}\right)}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\lambda^3}{9}}_{\to 0} + \frac{64}{9} = \boxed{\frac{64}{9}\text{ cm}^2}$$

<u>EXERCICE 3 :</u>

$f(x) = \dfrac{3x\cdot e^x + 3}{e^x}$

a) ~~1)~~ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x\cdot e^x + 3}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x\cdot e^x}{e^x} + \dfrac{3}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{3x}_{\to+\infty} + \underbrace{\dfrac{3}{e^x}}_{\to 0} = +\infty$

1

Donc C_f n'admet <u>pas d'asymptote horizontale à droite</u>.

Recherche d'une asymptote oblique éventuelle :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \underbrace{\dfrac{3}{xe^x}}_{\to 0} = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^x} = 0$.

2 C_f admet donc l'asymptote oblique à droite $\underline{d \equiv y = 3x}$.

~~2)~~ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\cdot \overbrace{\overbrace{x}^{\to-\infty}\ \overbrace{e^x}^{\to 0^+}}^{(*)\to 0} + 3}{\underbrace{e^x}_{\to 0^+}} = +\infty$. (*) Calcul à part : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\overbrace{x}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}} \overset{(H)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\underbrace{-e^{-x}}_{\to-\infty}} = 0^-$

3

Donc C_f n'admet <u>pas d'asymptote horizontale à gauche</u>.

Recherche d'une asymptote oblique éventuelle :

2

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\cdot e^x+3}{x\cdot e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x\cdot e^x}{x\cdot e^x}+\frac{3}{x\cdot e^x}=\lim_{x\to-\infty}3+\underbrace{\frac{3}{xe^x}}_{\to 0^-}=-\infty$$. d'après le calcul à part.

Donc C_f n'admet pas d'asymptote oblique à gauche.

b) Position de C_f par rapport à $d\equiv y=3x$

Signe de $f(x)-3x$: d'après a1), $f(x)-3x=\dfrac{3}{e^x}$ et $\dfrac{3}{e^x}>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc C_f est toujours située au-dessus de d.

EXERCICE 4 :

a) $$g(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-2}=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+cx^2+c}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{(a+c)x^2+(-2a+b)x+(c-2b)}{(x^2+1)(x-2)}$$

$$f(x)=g(x)\iff\begin{cases}a\quad +c=7 & L1\\ -2a+b\quad =-7 & L2 \text{ éliminons } c \text{ dans L3}\\ -2b+c=11 & L3\end{cases}$$

$$L3\to L1-L3\qquad\iff\begin{cases}a\quad +c=7\\ -2a+b\quad =-7 & \text{éliminons } a \text{ dans L3}\\ a+2b\quad =-4\end{cases}$$

$$L3\to L2+2L3\qquad\iff\begin{cases}a\quad +c=7 & L3\quad\Rightarrow \underline{b=-3}\\ -2a+b\ =-7 & \text{dans L2}\quad -2a-3=-7\Rightarrow\underline{a=2}\\ 5b\quad =-15 & \text{dans L1}\quad 2+c=7\Rightarrow\underline{c=5}\end{cases}$$

Ainsi $\underline{f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+1}+\dfrac{5}{x-2}}$

b) $$F(x)=\int\frac{2x-3}{x^2+1}dx+\int\frac{5}{x-2}dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{3}{x^2+1}dx+\int\frac{5}{x-2}dx \quad\text{sur }]-\infty;-2[$$

$$=\int 2x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx-3\int\frac{1}{x^2+1}dx+5\int\frac{1}{x-2}dx$$

$$=\ln|x^2+1|-3Arc\tan x+5\ln|x-2|+k$$

$$=\ln(x^2+1)-3Arc\tan x+5\ln(2-x)+k$$

Condition : $F(0)=\ln 16\iff\underbrace{\ln 1}_{=0}-3\cdot\underbrace{Arc\tan 0}_{=0}+5\cdot\ln 2+k=\ln 16\iff k=\ln 2^4-5\cdot\ln 2\iff k=-\ln 2$

Et finalement $\underline{F(x)=\ln(x^2+1)-3\cdot Arc\tan x+5\cdot\ln(2-x)-\ln 2}$