

## Epreuve écrite

**Examen de fin d'études secondaires 2014**

**Sections: C et D**

**Branche: Mathématiques II**

**Numéro d'ordre du candidat**

---

### Exercice 1

(3+4+6=13 points)

- 1) Démontrer que  $(\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}), (\forall x \in ]0; +\infty[), (\forall r \in \mathbb{R}) : \log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  et préciser à chaque fois l'ensemble des solutions :

a)  $3(e^x + 1) = 2e^{-x} \cdot (1 - e^x)$

b)  $\log_{\frac{1}{5}}(5 - x) + \log_5(2x - 1) \leq \frac{1}{2} \cdot \log_{\sqrt{5}}(x + 3)$

### Exercice 2

(3+4=7 points)

Calculer, en justifiant, les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x)}{\log(1 - x)}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x + 4}{3x - 1} \right)^{6x}$

### Exercice 3

(3+4+1+2+2+5=17 points)

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x^3 \cdot \ln(x) - x^3$

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  et étudier le comportement asymptotique de  $f$ .
- 2) Etudier le sens de variation de  $f$ , déterminer le(s) extrema(s) éventuel(s) et dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Déterminer l'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  avec l'axe des abscisses.
- 4) Déterminer une équation de la tangente  $t_1$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  au point d'abscisse 1.
- 5) Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  ainsi que la tangente  $t_1$  dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
- 6) Calculer l'aire  $A_\lambda$  de la partie du plan délimitée par la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \lambda$  et  $x = e$  avec  $0 < \lambda < e$ . Calculer ensuite la limite de  $A_\lambda$  si  $\lambda$  tend vers 0.

### Exercice 4

(3+4=7 points)

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln(2x)}{2^x - 4}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  et montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x - 3$  est une asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$ .
- 2) Etudier la position de la courbe  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  par rapport à son asymptote oblique  $\Delta$  sur tout le domaine de la fonction.

### Exercice 5

(6+4=10 points)

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \cdot \sin(4x) dx$

b)  $\int \frac{5x - 3}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

**TOURNER S.V.P. ↩**

**Exercice 6**

(2+4=6 points)

On donne la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par : 
$$f(x) = \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x + 3}{(x-1)^2}$$

- 1) Déterminer  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}) : f(x) = ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$
- 2) Déterminer sur un intervalle  $I$  à préciser la primitive  $F$  de  $f$  qui prend la valeur 7 en  $x = 0$ .