

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2008

Section: C/D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

I.(3 + 2 + 5 + 5 = 15 points)

1) Démontrer: si $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall y \in \mathbb{R}, \log_a x^y = y \log_a x$.

2) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{Arc sin } x}{\sin^2 x}$.

3) Résoudre dans \mathbb{R} :

a) $2 \ln 3 - \ln(3 - x) = \ln x - 2 \ln(x - 1)$

b) $\frac{2e^x + 1}{e^x - 1} \leq e^x + 3$

II.(12 + 4 + 2 = 18 points)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1 + 2 \ln x}{x}$.

1) Etudier f : domaines de définition et de continuité, limites aux bornes du domaine et asymptotes, sens de variation et extrema, concavité et points d'inflexion, racines, graphe cartésien dans un RON.

2) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre le graphe G_f , l'axe des x et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

3) Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{1 + \ln(x^2)}{x}$.

Déterminer le domaine de définition de g , la parité de g et expliquer comment on obtient le graphe cartésien de g à partir de celui de f .

III.(3 + 5 + 4 = 12 points)

1) Calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{3-2x}} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 - 2) \sin 2x dx$$

2) Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface comprise entre la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$ et la droite d'équation $x - 2y - 10 = 0$.

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2008

Section: C / D

Branche: Mathématiques II

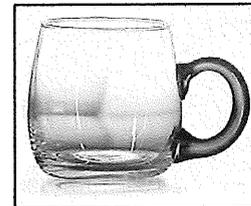
Numéro d'ordre du candidat

4^e question (question V200) :

Remarque : les parties 1 et 2 sont indépendantes !

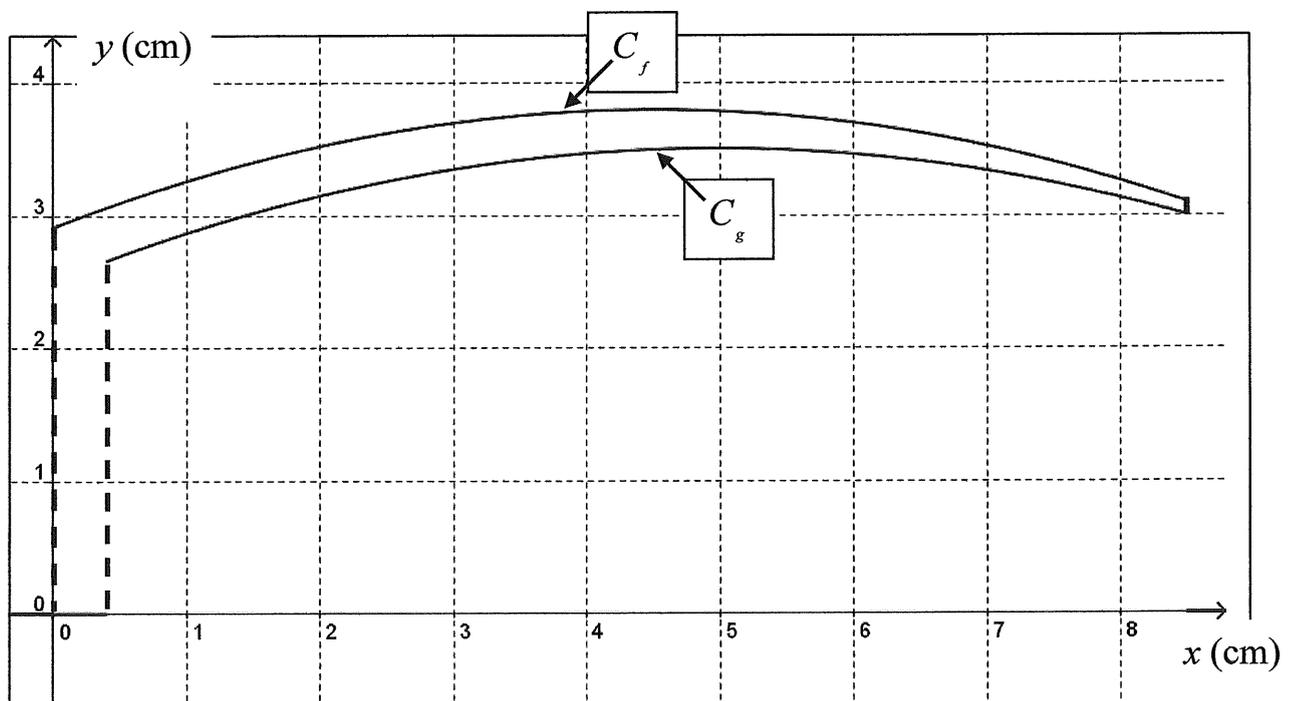
1^{ère} partie :

La figure ci-contre montre un verre à vin traditionnel allemand.



Abstraction faite de l'anse (all. : der Henkel), on peut représenter ce verre comme un corps de révolution.

A cet effet on fait tourner les graphes des deux fonctions f et g autour de l'axe des abscisses :



Le fond du verre a une épaisseur de $0,4 \text{ cm}$; la hauteur du verre est de $8,5 \text{ cm}$.

Les deux fonctions f et g sont des fonctions polynômes du 2^e degré.

L'expression de la fonction g , qui décrit l'intérieur du verre, est

$$g(x) = -\frac{13}{320}x^2 + \frac{129}{320}x + \frac{3211}{1280} \text{ avec } 0,4 \leq x \leq 8,5.$$

TOURNER S.V.P.

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2008

Section: C / D

Branche: Mathématiques II

Numéro d'ordre du candidat

La fonction f , qui décrit l'extérieur du verre, est déterminée par le tableau suivant :

| | | | |
|-------------------|-----|-----|-----|
| x (en cm) | 0,5 | 4,5 | 8,5 |
| $f(x)$ (en cm) | 3,1 | 3,8 | 3,1 |

- a) Etablir l'expression de la fonction f .
- b) Quelle quantité de verre (en cm^3) est nécessaire à la fabrication d'un tel verre à vin, si l'on sait que la seule anse nécessite autant de verre que le corps proprement dit ?
- c) Où faut-il apporter le repère (c.-à-d. la marque) indiquant les 250 ml ?

2^e partie :

Les coûts de fabrication (all. : die Herstellungskosten) d'un tel verre à vin diminuent avec le

nombre de verres fabriqués. La fonction $K(n) = \frac{a \cdot n + b}{n + 5}$ représente les coûts de fabrication d'un

seul verre pour une production totale de n verres. $K(n)$ est exprimé en €.

- a) Déterminer a et b sachant que la fabrication de 500 verres coûte 5,2 € par verre, celle de 1000 verres par contre ne coûte plus que 4,6 € par verre.
- b) Esquisser le graphe de la fonction K pour $100 \leq n \leq 1000$.
(On pourra utiliser l'éditeur de fonctions $Y=$ de la $V200$, en remplaçant toutefois la variable n par la variable x .)
- c) Un responsable de la fabrication affirme que, quel que soit le nombre de verres produits, les coûts de fabrication par verre ne pourront pas descendre au-dessous d'un certain seuil. A-t-il raison ? Si oui, quel est ce seuil ?

[9+6 = 15 pts]