

Corrigé

Question I

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}}$$

1) dom  $f = ]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}} \quad f.i. \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{A.H.D. } \gamma = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}} = -\infty \quad \text{A.V. } x = 0$$

2)  $\forall x \in \text{dom } f' = ]0; +\infty[$ ,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - (1 + \ln x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{2 - 1 - \ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \quad \text{str. positif}$$

signe de  $1 - \ln x$ :

$$\begin{aligned} 1 - \ln x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\geq \ln x \\ \Leftrightarrow e &\geq x \end{aligned}$$

tableau de variation:

$x$	$0$	$e$	$+\infty$
$f'$	$+$	$0$	$-$
$f$	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$0$

MAX

$$f(e) = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

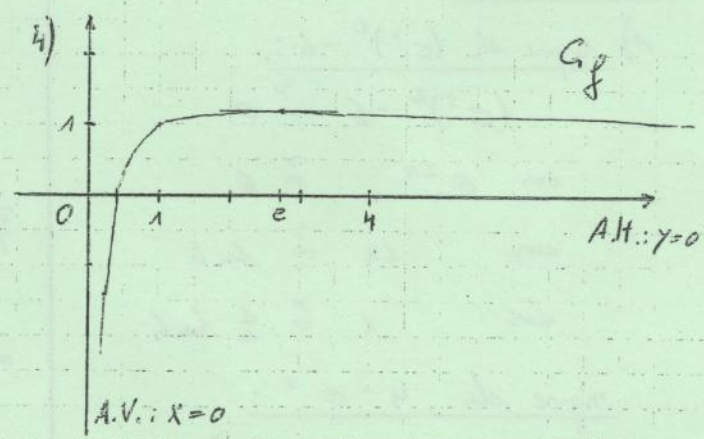
3)  $f(e^{-1}) = 0$

$$f'(e^{-1}) = \frac{2}{2e^{-1}\sqrt{e^{-1}}} = e\sqrt{e}$$

Éq. de la tangente au point d'abscisse  $e^{-1}$

$$y = e\sqrt{e} \left(x - \frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = e\sqrt{e}x - \sqrt{e}$$



5) Aire de la partie S:

$$A = \int_1^e f(x) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x}} dx \quad \begin{array}{l} \text{Par parties:} \\ u(x) = 1 + \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad v(x) = 2\sqrt{x} \end{array}$$

$$= \left[ 2\sqrt{x} \cdot (1 + \ln x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \left[ 2\sqrt{x}(1 + \ln x) \right]_1^e - \left[ 4\sqrt{x} \right]_1^e$$

$$= (4\sqrt{e} - 2) - (4\sqrt{e} - 4)$$

$$= 2 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm}^2$$

6) Volume du solide engendré par S:

$$V = \pi \int_1^e [f(x)]^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_1^e \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$$

$$= \pi \cdot \int_1^e [u(x)]^2 \cdot u'(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{Poser:} \\ u(x) = 1 + \ln x \\ u'(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

$$= \pi \cdot \left[ \frac{1}{3} [u(x)]^3 \right]_1^e$$

$$= \pi \cdot \left[ \frac{1}{3} (1 + \ln x)^3 \right]_1^e$$

$$= \pi \cdot \left( \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{7}{3} \pi \text{ u.v.} = \frac{7\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Question II

1) signe de  $(e^x)^2 - 6$  :

$$(e^x)^2 - 6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq \ln 6$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \ln 6$$

signe de  $4 - e^x$  :

$$4 - e^x \geq 0$$

$$e^x \leq 4$$

$$x \leq \ln 4$$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 6}{2}$	$\ln 4$	$+\infty$
$(e^x)^2 - 6$	-	0	+	+
$4 - e^x$	+	+	0	-
$\frac{(e^x)^2 - 6}{4 - e^x}$	-	0	+	-

$$S = \left[ \frac{\ln 6}{2}, \ln 4 \right[$$

2) C.E. :  $2^x - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow 2^x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

dorsque  $x \in D = ]0; +\infty[$ ,

$$x + 3 \cdot \log_8 (2^x - 1) = \log_2 12$$

$$\Leftrightarrow x + 3 \cdot \frac{\log_2 (2^x - 1)}{\log_2 8} = \log_2 12$$

$$\Leftrightarrow x + \log_2 (2^x - 1) = \log_2 (12)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 (2^x - 1) = \log_2 (12)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^x \cdot (2^x - 1) = \log_2 12$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x = 12$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Poser :  $Y = 2^x > 0$

$$Y^2 - Y - 12 = 0$$

$$Y = -3 \quad \text{ou} \quad Y = 4$$

impossible  $\Leftrightarrow 2^x = 4$

$$\Leftrightarrow x = 2 \in D$$

$$S' = \{2\}$$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{2^x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\log(7-x)}_{\rightarrow +\infty}$  f.i. " $\infty \cdot 0$ "

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(7-x) \xrightarrow{+\infty}}{(\ln 10) \cdot e^{-x \cdot \ln 2} \xrightarrow{+\infty}}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{7-x} \cdot (-1) \xrightarrow{0}}{(\ln 10) \cdot e^{-x \cdot \ln 2} \cdot (-\ln 2) \xrightarrow{-\infty}}$$

$$= 0$$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x+1}$  Poser :  $Y = \frac{3}{x}$

$$= \lim_{Y \rightarrow 0} \left[ \underbrace{\left(1 + Y\right)^{\frac{1}{Y}}}_{\rightarrow e} \right]^6 \cdot (1 + Y)$$

$$= e^6$$

Question III

1)  $\int (x^2 + 3x) \cdot \sin(2x) dx$

Par parties:

$u(x) = x^2 + 3x$      $u'(x) = 2x + 3$

$v'(x) = \sin(2x)$      $v(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x)$

$= (x^2 + 3x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) + \frac{1}{2} \int (2x + 3) \cos(2x) dx$

Par parties:

$u(x) = 2x + 3$      $u'(x) = 2$

$v'(x) = \cos(2x)$      $v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

$= (x^2 + 3x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos(2x)\right) + \frac{1}{4} (2x + 3) \cdot \sin(2x)$

$-\frac{1}{2} \int \sin(2x) dx$

$= -\frac{1}{2} (x^2 + 3x) \cdot \cos(2x) + \frac{1}{4} (2x + 3) \cdot \sin(2x)$

$+ \frac{1}{4} \cos(2x) + C$

$= -\frac{1}{4} (2x^2 + 6x - 1) \cos(2x) + \frac{1}{4} (2x + 3) \sin(2x) + C$

2)  $\int \frac{x^2 + 4x + 9}{x^3 + 4x^2 + 2x + 4} dx$

$= \int \left( \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{1}{x + 2} \right) dx$  (V200, expand)

$= 2 \cdot \arctan(x) + \frac{1}{2} \cdot \ln|x + 2| + C$

3) a)  $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{9 - x^2}} dx$

$= \int \frac{\overset{u'(x)}{-2x}}{\underset{u(x)}{2\sqrt{9 - x^2}}} dx + \int \frac{-1}{3\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}} dx$

$= (-2) \cdot \sqrt{9 - x^2} - \int \frac{\left(\frac{1}{3}\right) u'(x)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}} dx$

$= -2 \cdot \sqrt{9 - x^2} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$

b)  $F(x) = -2\sqrt{9 - x^2} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$

$F(0) = 5$

$\Leftrightarrow -6 + C = 5$

$\Leftrightarrow C = 11$

d'où:  $F(x) = -2\sqrt{9 - x^2} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + 11$

## Problem solving (V200)

## Sections C et D

1) On cherche une fonction  $f$  définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  telle que

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(11) = 6 \\ f'(11) = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$f(x) = -\frac{5}{121}x^2 + \frac{10}{11}x + 1$$

b) L'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des  $x$  est approximativement 23,05. D'où la portée du tir est à peu près de 23,05 m.

2) a) La trajectoire décrit une parabole, car son équation est de la forme

$$y = ax^2 + bx + c$$

avec  $a \approx -0,047$  ;  $b = 1$  et  $c = 1$

b) On détermine la dérivée de la fonction  $T$  et on résout  $T'(x) = 0$ .

On trouve  $T'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = x_M \text{ avec } x_M \approx 10,73$$

(Comme  $y = T(x)$  est l'équation d'une parabole, on peut en tirer que  $T$  admet un extremum en  $x = x_M$ )

$$\text{Alors } T(x_M) \approx 6,36$$

La hauteur maximale est approximativement de 6,36 m.

c) On résout l'équation  $T(x) < 3$  et on trouve

$$T(x) < 3 \Leftrightarrow x < x_1 \text{ ou } x > x_2$$

$$\text{avec } x_1 \approx 2,23$$

$$\text{et } x_2 \approx 19,22$$

L'adversaire doit donc se trouver au minimum à  $19,22 - 12 = 7,22$  m du filet pour être certain de pouvoir intercepter la balle.

d) On pose maintenant

$$T(x) = -\frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{x^2}{15,5^2 \cdot (\cos 45)^2} + \tan 45 \cdot x + 1$$

Alors

$$T(20) \cong 4,68$$

Comme  $T(20) \geq 3$ , l'adversaire ne peut pas intercepter la balle.

En résolvant  $T(x) = 0$ , on

trouve  $T(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = x_3 \text{ ou } x = x_4$$

$$\text{avec } x_3 \cong -0,96 \text{ et } x_4 \cong 25,48$$

D'où la portée du tir est de 25,48 m et la balle sort hors des limites du terrain.

Posons maintenant

$$T(x) = -\frac{1}{2} \cdot 9,8 \frac{x^2}{15,5^2 (\cos 32)^2} + \tan 32 \cdot x + 1$$

Alors

$$T(20) \cong 2,15$$

et l'adversaire peut intercepter la balle.

**Corrigé – Mathématiques II**  
**Problem solving (V200)**  
**Sections C et D**  
**(2007)**

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up

- $a \cdot x^2 + b \cdot x + c + f(x)$  Done
- $\frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow df(x)$  Done
- solve( $f(0) = 1$  and  $f(11) = 6$  and  $df(11) \Rightarrow$   
 $a = -\frac{5}{121}$  and  $b = 10/11$  and  $c = 1$ )
- $f(x) | a = -\frac{5}{121}$  and  $b = 10/11$  and  $c = 1$

MAIN DEG AUTO FUNC 5/30

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up

- $-\frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot x^2 + \tan(45) \cdot x + 1$   
 $(14.5)^2 \cdot (\cos(45))^2 - .0466111772 \cdot x^2 + x + 1$
- $-\frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot x^2 + \tan(45) \cdot x + 1 + t(x)$   
 $(14.5)^2 \cdot (\cos(45))^2 + \tan(45) \cdot x + 1 + t(x)$  Done

**\*cos(45)^2+tan(45)\*x+1+t(x)**

MAIN DEG AUTO FUNC 7/30

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up

$a = -\frac{5}{121}$  and  $b = 10/11$  and  $c = 1$

- $f(x) | a = -\frac{5}{121}$  and  $b = 10/11$  and  $c = 1$   
 $-\frac{5 \cdot x^2}{121} + \frac{10 \cdot x}{11} + 1$
- $-\frac{5 \cdot x^2}{121} + \frac{10 \cdot x}{11} + 1 + f(x)$  Done

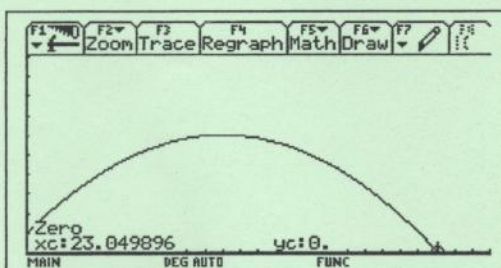
MAIN DEG AUTO FUNC 5/30

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up

- $(14.5)^2 \cdot (\cos(45))^2$  Done
- $\frac{d}{dx}(t(x)) \rightarrow dt(x)$  Done
- solve( $dt(x) = 0, x$ )  $x = 10.72704082$
- $t(10.727040816326)$   $6.36352040E$
- solve( $t(x) < 3, x$ )  
 $x < 2.232263514$  or  $x > 19.22181812$

**solve(t(x)<3,x)**

MAIN DEG AUTO FUNC 11/30



F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up

- $x < 2.232263514$  or  $x > 19.22181812$
- $-\frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot x^2 + \tan(45) \cdot x + 1 + t(x)$   
 $(15.5)^2 \cdot (\cos(45))^2 + \tan(45) \cdot x + 1 + t(x)$  Done
- $t(20)$   $4.683662851$
- solve( $t(x) = 0, x$ )  
 $x = -.9622321384$  or  $x = 25.47753826$

**solve(t(x)=0,x)**

MAIN DEG AUTO FUNC 14/30

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up

- $t(20)$   $4.683662851$
- solve( $t(x) = 0, x$ )  
 $x = -.9622321384$  or  $x = 25.47753826$
- $-\frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot x^2 + \tan(32) \cdot x + 1 + t(x)$   
 $(15.5)^2 \cdot (\cos(32))^2 + \tan(32) \cdot x + 1 + t(x)$  Done
- $t(20)$   $2.153766037$

**t(20)**

MAIN DEG AUTO FUNC 16/30