Corrigé

Question I

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}$$

1) $\mathrm{dom}\, f =]0\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{(1+\ln x)}}{\underset{\to+\infty}{\sqrt{x}}} \qquad \text{f.i. } \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \qquad \underline{\text{A.H.D. } y=0}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\overset{\to-\infty}{(1+\ln x)}}{\underset{\to0^+}{\sqrt{x}}} = -\infty \qquad \underline{\text{A.V.: } x=0}$$

2) $\forall x \in \mathrm{dom}\, f' =]0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - (1+\ln x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{2-1-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{1-\ln x}{\underbrace{2x\sqrt{x}}_{\text{str. positif}}}$$

signe de $1-\ln x$:

$$1-\ln x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 \geq \ln x$$
$$\Leftrightarrow \quad e \geq x$$

tableau de variation :

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$ MAX	$\searrow$	0

$$f(e) = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

3) $f(e^{-1}) = 0$

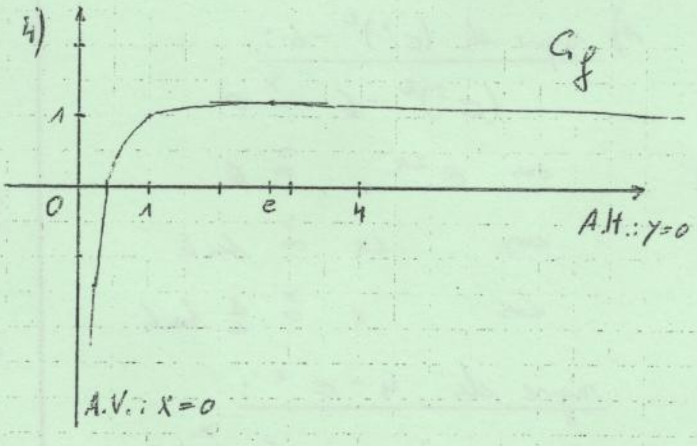
$$f'(e^{-1}) = \frac{2}{2e^{-1}\sqrt{e^{-1}}} = e\sqrt{e}$$

Éq. de la tangente au point d'abscisse e^{-1} :

$$y = e\sqrt{e}\left(x - \frac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = e\sqrt{e}\, x - \sqrt{e}}$$

4)



5) Aire de la partie S :

$$A = \int_1^e f(x)\,dx$$

$$= \int_1^e \frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

Par partie :
$u(x) = 1+\ln x \qquad v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v(x) = 2\sqrt{x}$

$$= \Big[2\sqrt{x}\cdot(1+\ln x)\Big]_1^e - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \Big[2\sqrt{x}(1+\ln x)\Big]_1^e - \Big[4\sqrt{x}\Big]_1^e$$

$$= \left(4\sqrt{e} - 2\right) - \left(4\sqrt{e} - 4\right)$$

$$= 2 \text{ u.a.} = 2 \text{ cm}^2$$

6) Volume du solide engendré par S :

$$V = \pi\int_1^e \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$= \pi\cdot\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$= \pi\cdot\int_1^e \left[u(x)\right]^2\cdot u'(x)\,dx$$

Poser :
$u(x) = 1+\ln x$
$u'(x) = \frac{1}{x}$

$$= \pi\cdot\left[\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3\right]_1^e$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{1}{3}(1+\ln x)^3\right]_1^e$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{7}{3}\cdot\pi \text{ u.v.} = \frac{7\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Question II

1) signe de $(e^x)^2 - 6$:

$$(e^x)^2 - 6 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} \geq 6$$
$$\Leftrightarrow 2x \geq \ln 6$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}\ln 6$$

signe de $4 - e^x$:

$$4 - e^x \geq 0$$
$$e^x \leq 4$$
$$x \leq \ln 4$$

x	$-\infty$		$\frac{\ln 6}{2}$		$\ln 4$		$+\infty$
$(e^x)^2-6$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$4-e^x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\frac{(e^x)^2-6}{4-e^x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$$S = \left[\frac{\ln 6}{2} ; \ln 4\right[$$

2) C.E. : $2^x - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow 2^x > 1$$
$$\Leftrightarrow x > 0$$

Lorsque $x \in D =]0 ; +\infty[$,

$$x + 3 \cdot \log_8 (2^x - 1) = \log_2 12$$
$$\Leftrightarrow x + 3 \cdot \frac{\log_2(2^x-1)}{\log_2 8} = \log_2 12$$
$$\Leftrightarrow x + \log_2(2^x - 1) = \log_2(12)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2(2^x-1) = \log_2(12)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 2^x \cdot (2^x - 1) = \log_2 12$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x = 12$$
$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Poser : $y = 2^x > 0$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$y = -3$ ou $y = 4$

impossible $\qquad \Leftrightarrow 2^x = 4$

$$\Leftrightarrow x = 2 \in D$$

$$S' = \{2\}$$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{2^x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\log(7-x)}_{\to +\infty}$ f.i. "$\infty \cdot 0$"

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(7-x) \nearrow +\infty}{(\ln 10) \cdot e^{-x \cdot \ln 2} \searrow +\infty}$ f.i. "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{7-x} \cdot (-1)}{(\ln 10) \cdot e^{-x \cdot \ln 2} \cdot (-\ln 2)} \begin{matrix} \} \to 0 \\ \} \to -\infty \end{matrix}$

$= 0$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x+1}$ Poser : $y = \frac{3}{x}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \left[\underbrace{\left(1 + y\right)^{\frac{1}{y}}}_{\to e}\right]^6 \cdot (1 + y)$

$= e^6$

Question III

1) $\int (x^2+3x)\cdot \sin(2x)\, dx$

Par parties :
$u(x) = x^2+3x \qquad v'(x) = \sin 2x$
$u'(x) = 2x+3 \qquad v(x) = \frac{-1}{2}\cos 2x$

$$= (x^2+3x)\cdot\left(\frac{-1}{2}\cos 2x\right) + \frac{1}{2}\int (2x+3)\cos 2x\, dx$$

Par parties :
$u(x) = 2x+3 \qquad v'(x) = \cos 2x$
$u'(x) = 2 \qquad v(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

$$= (x^2+3x)\cdot \frac{-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\cdot \sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}(x^2+3x)\cdot \cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\cdot\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$$= \frac{-1}{4}(2x^2+6x-1)\cos 2x + \frac{1}{4}(2x+3)\sin 2x + C$$

2) $\int \frac{x^2+4x+9}{2x^3+4x^2+2x+4}\, dx$ (V200, expand)

$$= \int\left(\frac{2}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2}\right) dx$$

$$= 2\cdot \arctan x + \frac{1}{2}\cdot \ln|x+2| + C$$

3) a) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$

$$= \int (-2)\frac{\overset{u'(x)}{-2x}}{2\sqrt{\underbrace{9-x^2}_{u(x)}}}\, dx + \int \frac{-1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\, dx$$

$$= (-2)\cdot\sqrt{9-x^2} - \int \frac{\overset{u'(x)}{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1-\left(\underbrace{\frac{x}{3}}_{u(x)}\right)^2}}\, dx$$

$$= -2\cdot\sqrt{9-x^2} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

b) $F(x) = -2\sqrt{9-x^2} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$

$F(0) = 5$
$\Leftrightarrow -6 + C = 5$
$\Leftrightarrow C = 11$

d'où : $F(x) = -2\sqrt{9-x^2} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + 11$

Corrigé - Mathématiques II

Problem solving (V200)

Sections C et D

1) a) On cherche une fonction f définie par $f(x) = ax^2+bx+c$ telle que

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(11)=6 \\ f'(11)=0 \end{cases}$$

On obtient

$$f(x) = -\frac{5}{121}x^2 + \frac{10}{11}x + 1$$

b) L'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'axe des x est approximativement $23{,}05$.

D'où la portée du tir est à peu près de $23{,}05$ m.

2) a) La trajectoire décrit une parabole, car son équation est de la forme

$$y = ax^2+bx+c$$

avec $a \cong -0{,}047$; $b=1$ et $c=1$

b) On détermine la dérivée de la fonction T et on résout $T'(x)=0$.

On trouve $T'(x)=0$

$$\Leftrightarrow x = x_M \text{ avec } x_M \cong 10{,}73$$

(Comme $y=T(x)$ est l'équation d'une parabole, on peut en tirer que T admet un extremum en $x=x_M$)

Alors $T(x_M) \cong 6{,}36$

La hauteur maximale est approximativement de $6{,}36$ m.

c) On résout l'équation $T(x)<3$ et on trouve

$$T(x)<3 \Leftrightarrow x<x_1 \text{ ou } x>x_2$$

avec $x_1 \cong 2{,}23$ et $x_2 \cong 19{,}22$

L'adversaire doit donc se trouver au minimum à $19{,}22-12 = 7{,}22$ m du filet pour être certain de pouvoir intercepter la balle.

d) On pose maintenant

$$T(x) = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\,\frac{x^2}{15{,}5^2\cdot(\cos 45)^2} + \tan 45\cdot x + 1$$

Alors

$T(20) \cong 4{,}68$

Comme $T(20) \geq 3$, l'adversaire ne peut pas intercepter la balle.

En résolvant $T(x)=0$, on trouve $T(x)=0$

$\Leftrightarrow x = x_3$ ou $x = x_4$

avec $x_3 \cong -0{,}96$ et $x_4 \cong 25{,}48$

D'où la portée du tir est de 25,48 m et la balle sort hors des limites du terrain.

Posons maintenant

$$T(x) = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\,\frac{x^2}{15{,}5^2(\cos 32)^2} + \tan 32\cdot x + 1$$

Alors

$T(20) \cong 2{,}15$

et l'adversaire peut intercepter la balle.

Corrigé – Mathématiques II
Problem solving (V200)
Sections C et D
(2007)