EFES - 2008 - B - Mathématiques II - Ecrit - Corrigé

I. $f : x \longmapsto \begin{cases} a - b^x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases} \qquad (a \in \mathbb{R}\ ;\ b \in \mathbb{R}_0^+)$.

a) $dom\ f = \mathbb{R}$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (a - b^x) = a - 1$

f est continu au point $0 \Longleftrightarrow a - 1 = 0 \Longleftrightarrow a = 1$

$f : x \longmapsto \begin{cases} 1 - b^x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

$(\forall x < 0) \qquad f'(x) = -b^x \ln b$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-b^x \ln b) = -\ln b = f'_g(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(3x^2 - 4x + 1\right) = 1 = f'_d(0)$

f est dérivable en $0 \Longleftrightarrow -\ln b = 1 \Longleftrightarrow b = e^{-1}$.

On a alors : $f'(0) = 1$.

$\Delta_0 : y = x$

b) i. $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

f est défini, continu et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\mathcal{C}_f$ admet une B.P. dans la direction de Oy pour $x \longrightarrow +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} \quad \left[f.i. \frac{\infty}{\infty}\right] \underset{[H]}{=} \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$\mathcal{C}_f$ admet une B.P. dans la direction de Oy pour $x \longrightarrow -\infty$

$(\forall x < 0) \qquad f'(x) = e^{-x} > 0$

$(\forall x > 0) \qquad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$ max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$+\infty$

$(\forall x < 0) \qquad f''(x) = -e^{-x} < 0$

$(\forall x > 0) \qquad f''(x) = 6x - 4$

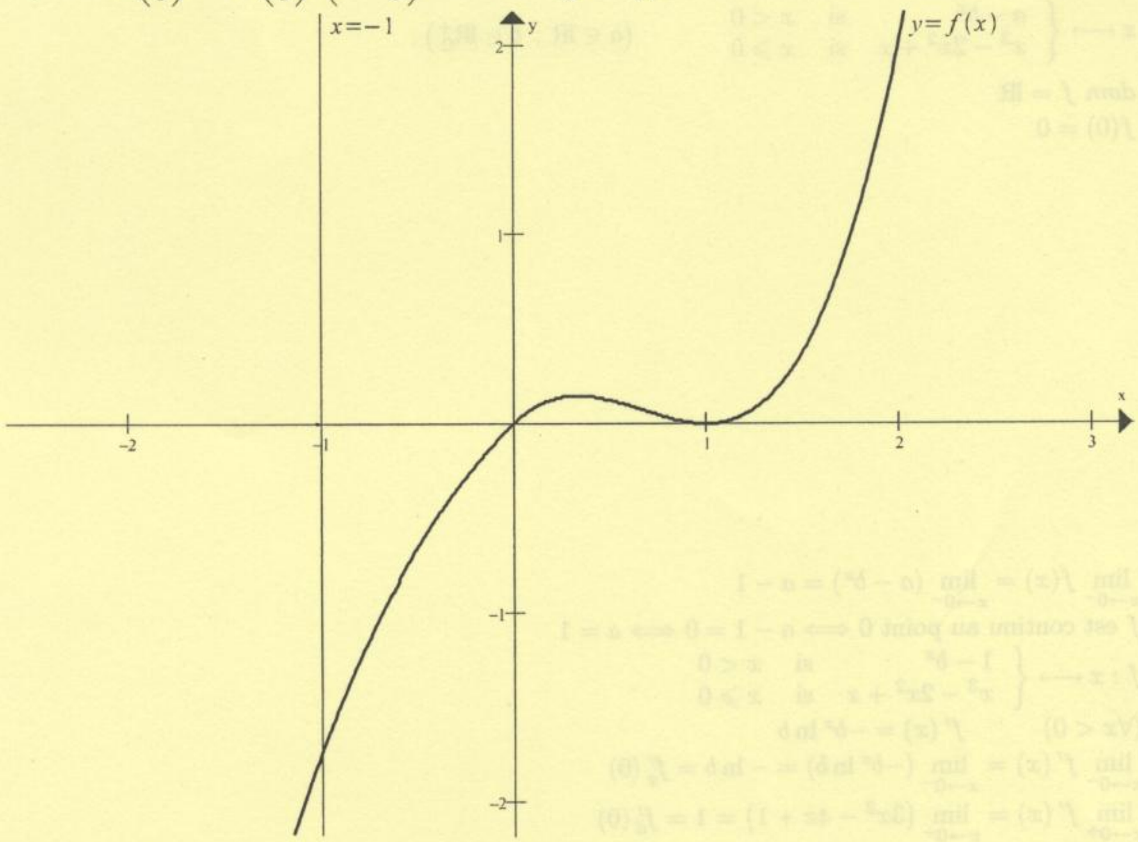
$\lim\limits_{x \to 0^-} f''(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-e^{-x}) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (6x - 4) = -4$

$f''(0)$ n'existe pas.

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
		concave		concave	inflexion	convexe	

$$\Delta_{\frac{2}{3}} : y - f\left(\frac{2}{3}\right) = f'\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \iff y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{27}$$



ii. $D = D_1 \cup D_2$

$$\begin{aligned} \text{où } D_1 &= \{M(x;y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ et } f(x) \leqslant y \leqslant 0\} \\ D_2 &= \{M(x;y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \mathcal{A}(D) &= -\int_{-1}^{0} (1 - e^{-x})\,dx + \int_{0}^{1} \left(x^3 - 2x^2 + x\right) dx \\ &= -\left[x + e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= e - \frac{23}{12} \approx 0,8 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \mathcal{V} &= \pi \int_{-1}^{0} (1 - e^{-x})^2\,dx + \pi \int_{0}^{1} \left(x^3 - 2x^2 + x\right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^{0} \left(1 - 2e^{-x} + e^{-2x}\right) dx + \pi \int_{0}^{1} \left(x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 4x^3 + x^2\right) dx \\ &= \pi \left[x + 2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{0} + \pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{3} + \frac{6x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{527\pi}{210} + \frac{\pi e^2}{2} - 2\pi e \approx 2,41 \text{ u.v.} \end{aligned}$$

.... [13 points]

II. $f : x \longmapsto \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + 2\right)$

a) $(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad x^2 - 2x + 2 > 0$

$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad f(x) = -\dfrac{1}{\ln 2} \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$

dom $f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= -\frac{1}{\ln 2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x} \qquad \left[f.i. \frac{\infty}{\infty}\right] \\ &\underset{[H]}{=} -\frac{1}{\ln 2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} \\ &= -\frac{1}{\ln 2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(2 - \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

C_f admet une B.P. dans la direction de Ox pour $x \longrightarrow \pm\infty$.

$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{2(x-1)}{x^2-2x+2} = \dfrac{-2(x-1)}{(x^2-2x+2)\ln 2}$

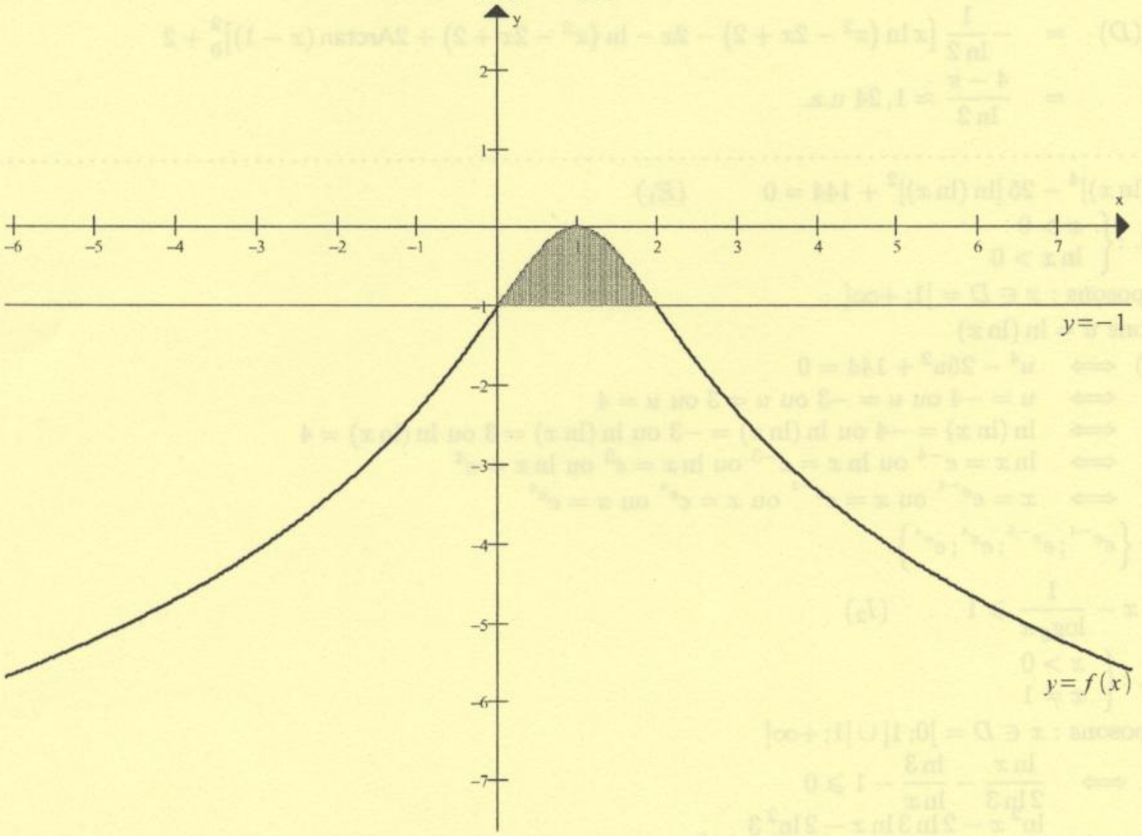
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	$-\infty$

$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad f''(x) = -\dfrac{1}{\ln 2} \cdot \dfrac{-2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2} = \dfrac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2 \ln 2}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
		convexe	inflexion	concave	inflexion	convexe	

$\Delta_0 : y - f(0) = f'(0) \cdot x \Longleftrightarrow y = \dfrac{1}{\ln 2}x - 1$

$\Delta_2 : y - f(2) = f'(2)(x-2) \Longleftrightarrow y = -\dfrac{1}{\ln 2}x + \dfrac{2}{\ln 2} - 1$



b) $\Delta : y = -1$

$$f(x) = -1 \iff -\frac{1}{\ln 2}\ln(x^2-2x+2) = -1 \iff \ln(x^2-2x+2) = \ln 2$$

$$\iff x^2 - 2x + 2 = 2 \qquad \text{[car ln bijectif]}$$

$$\iff x^2 - 2x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2$$

$D = \{M(x;y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } -1 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(D) &= \int_0^2 (f(x)+1)\,dx \\ &= -\frac{1}{\ln 2}\int_0^2 \ln(x^2-2x+2)\,dx + \int_0^2 dx \end{aligned}$$

Calcul de $\int \ln\left(x^2-2x+2\right)dx$

i.p.p. posons : $u(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$ $\quad v'(x)=1$

On a : $u'(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$ $\quad v(x)=x$

$$\int \ln\left(x^2-2x+2\right)dx = x\ln\left(x^2-2x+2\right)-\int \frac{2x^2-2x}{x^2-2x+2}dx$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-2x}{x^2-2x+2}dx &\underset{[V200]}{=} \int\left[2+\frac{2x}{x^2-2x+2}-\frac{4}{x^2-2x+2}\right]dx\\
&= \int\left[2+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-\frac{2}{x^2-2x+2}\right]dx\\
&= 2x+\ln\left(x^2-2x+2\right)-\int\frac{2}{(x-1)^2+1}dx\\
&= 2x+\ln\left(x^2-2x+2\right)-2\mathsf{Arctan}(x-1)+k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) &= -\frac{1}{\ln 2}\left[x\ln\left(x^2-2x+2\right)-2x-\ln\left(x^2-2x+2\right)+2\mathsf{Arctan}\,(x-1)\right]_0^2+2\\
&= \frac{4-\pi}{\ln 2}\approx 1,24 \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

.... [12 points]

III. a) $[\ln(\ln x)]^4-25\,[\ln(\ln x)]^2+144=0 \qquad (E_1)$

C.E. : $\begin{cases} x>0\\ \ln x>0\end{cases}$

supposons : $x\in D=\,]1;+\infty[$

posons $u=\ln(\ln x)$

$$\begin{aligned}
(E_1) &\iff u^4-25u^2+144=0\\
&\iff u=-4 \text{ ou } u=-3 \text{ ou } u=3 \text{ ou } u=4\\
&\iff \ln(\ln x)=-4 \text{ ou } \ln(\ln x)=-3 \text{ ou } \ln(\ln x)=3 \text{ ou } \ln(\ln x)=4\\
&\iff \ln x=e^{-4} \text{ ou } \ln x=e^{-3} \text{ ou } \ln x=e^{3} \text{ ou } \ln x=e^{4}\\
&\iff x=e^{e^{-4}} \text{ ou } x=e^{e^{-3}} \text{ ou } x=e^{e^{3}} \text{ ou } x=e^{e^{4}}
\end{aligned}$$

$S=\left\{e^{e^{-4}};e^{e^{-3}};e^{e^{3}};e^{e^{4}}\right\}$

b) $\log_9 x-\dfrac{1}{\log_3 x}\geqslant 1 \qquad (I_2)$

C.E. : $\begin{cases} x>0\\ x\neq 1\end{cases}$

supposons : $x\in D=\,]0;1[\,\cup\,]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}
(I_2) &\iff \frac{\ln x}{2\ln 3}-\frac{\ln 3}{\ln x}-1\geqslant 0\\
&\iff \frac{\ln^2 x-2\ln 3\ln x-2\ln^2 3}{2\ln 3\ln x}\geqslant 0
\end{aligned}$$

$\ln^2 x-2\ln 3\ln x-2\ln^2 3=0 \qquad [\Delta'=\ln^2 3+2\ln^2 3=3\ln^2 3]$

$\iff \ln x=\ln 3-\sqrt{3}\ln 3=(1-\sqrt{3})\ln 3$ ou $\ln x=(1+\sqrt{3})\ln 3$

$\iff x=3^{1-\sqrt{3}}$ ou $x=3^{1+\sqrt{3}}$

x	0		$3^{1-\sqrt{3}}$		1		$3^{1+\sqrt{3}}$	
$\ln^2 x-2\ln 3\ln x-2\ln^2 3$	‖	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$2\ln 3\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{\ln^2 x-2\ln 3\ln x-2\ln^2 3}{2\ln 3\ln x}$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

$S=\left[3^{1-\sqrt{3}};1\right[\,\cup\,\left[3^{1+\sqrt{3}};+\infty\right[$

c) $2^{1+x}+3\cdot 2^{-x}=7 \qquad (E_3)$

$$\begin{aligned}
(E_3) &\iff 2\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}=7 && |\cdot 2^x\\
&\iff 2\cdot 2^{2x}-7\cdot 2^x+3=0 && [\text{posons : } u=2^x]\\
&\iff 2u^2-7u+3=0\\
&\iff u=\frac{1}{2} \text{ ou } u=3\\
&\iff 2^x=2^{-1} \text{ ou } 2^x=3\\
&\iff x=-1 \text{ ou } x=\log_2 3
\end{aligned}$$

$S=\{-1;\log_2 3\}$

. . . . [10 points]

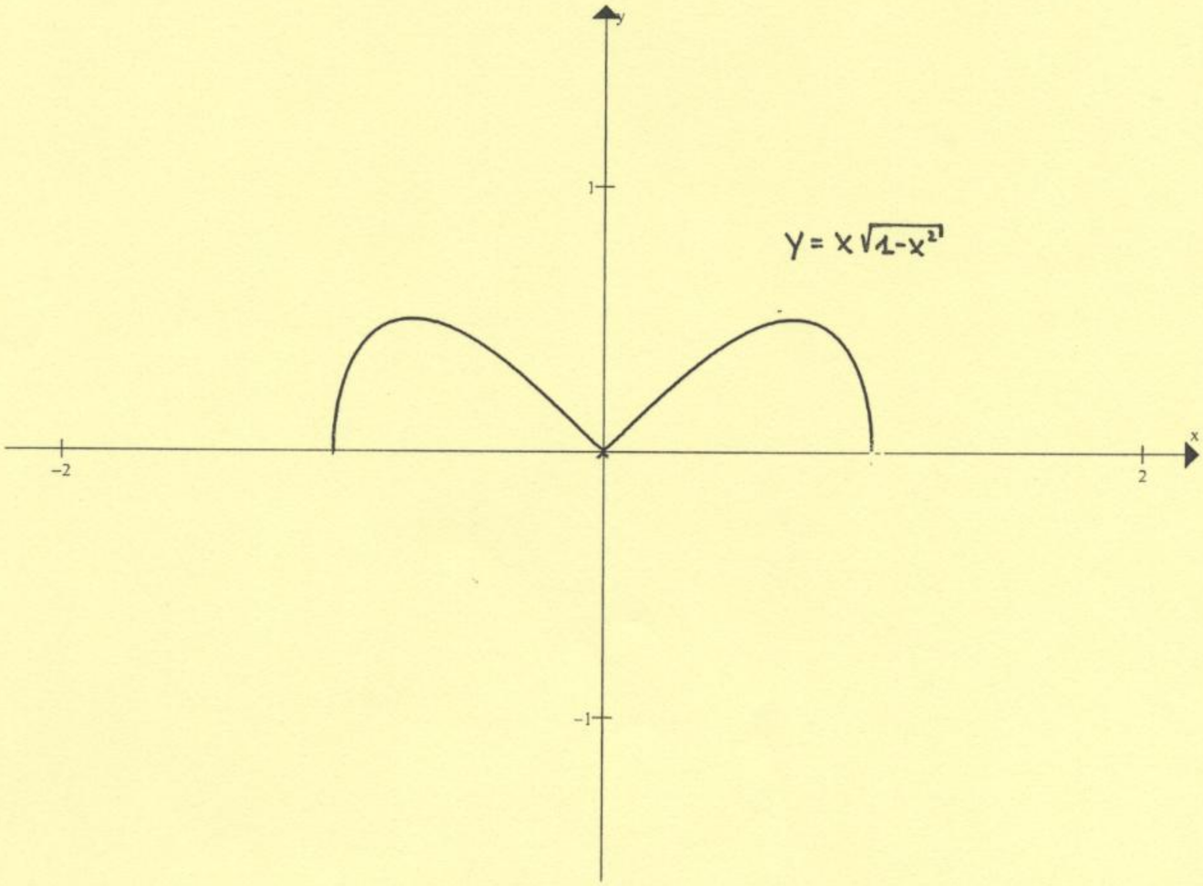
IV. a) $f: \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sqrt{1-x^2} \end{array}$

$dom\ f = [0;1]$

$(\forall x \in dom\ f) \qquad f(x) \geqslant 0$

$D = \{M\,(x;y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

$$\mathcal{A}(D) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \left[-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u.a.}$$



b) $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

Posons : $x = \dfrac{1}{t}$. On a : $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t^2} \Longrightarrow dx = -\dfrac{1}{t^2}dt$

et $\quad x = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\quad x = 2 \quad \Longrightarrow \quad t = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= = -\left[\mathsf{Arcsin}\ t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

c) $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\lambda} \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\mathsf{Arctan}\frac{x}{2}\right]_0^{\lambda} = \frac{1}{2}\mathsf{Arctan}\frac{\lambda}{2}$

$\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = \frac{\pi}{4}$ [car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathsf{Arctan}\ x = \frac{\pi}{2}$].

d) $\displaystyle\int_1^2 x2^{-x^2}dx = \int_1^2 xe^{-x^2\ln 2}dx = -\frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 -2x(\ln 2)\,e^{-x^2\ln 2}dx = -\frac{1}{2\ln 2}\left[e^{-x^2\ln 2}\right]_1^2 = \frac{7}{32\ln 2}$

[10 points]

II. b) Calcul de $\int_0^2 \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) dx$ **Version 2**

Comme la courbe admet la droite x=1 comme axe de symétrie,
effectuons la translation : $x - 1 = t \Leftrightarrow x = t + 1$;
bornes : $x = 0 \Rightarrow t = -1$
$x = 2 \Rightarrow t = +1$.

$$\int_0^2 \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \ln\left(t^2 + 1\right) dt$$

$$= 2\int_0^1 \ln\left(t^2 + 1\right) dt \qquad \text{; fonction paire}$$

p. p. $u(t) = \ln(t^2 + 1)$ $\quad v(t) = 1$

$u'(t) = \dfrac{2t}{t^2 + 1}$ $\quad v'(t) = t$

$$= 2\left[t \cdot \ln\left(t^2 + 1\right)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{2t}{t^2 + 1} dt$$

$$= 2 \cdot \ln 2 - 4\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt$$

$$= 2 \cdot \ln 2 - 4 + 4 \cdot \left[\arctan(t)\right]_0^1$$

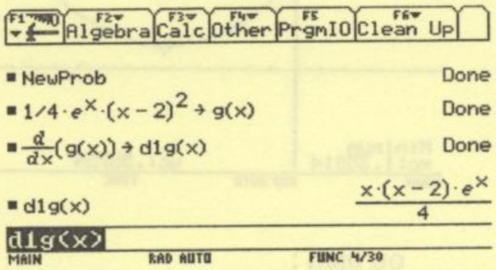
$$= 2 \cdot \ln 2 - 4 + \pi$$

Répartition des points :
* Modélisation et résolution de problèmes 3 points
* Communication et argumentation 5 points
* Connaissances en analyse mathématique, rigueur mathématique 7 points

Corrigé modèle

Problème V200 : « Chaise RELAX »

$$g(x)=\frac{1}{4}e^{x}\cdot(x-2)^{2}.$$



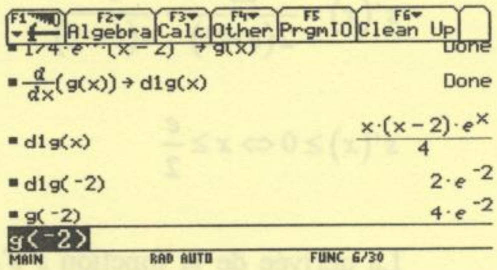
a) $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$

$$g'(x)=\frac{1}{4}x\cdot(x-2)\cdot e^{x}$$

d'où

$g'(-2)=2e^{-2}$

$g(-2)=4e^{-2}$



Equation de la tangente à C_g en $x=-2$:

$$T_{-2} \equiv y = 2e^{-2}(x+2)+4e^{-2}$$

$$\boxed{T_{-2} \equiv y = 2e^{-2}x+8e^{-2}}$$

Point d'intersection de T_{-2} avec l'axe des abscisses :

$$y=0 \Leftrightarrow 2e^{-2}(x+4)=0 \Leftrightarrow x=-4$$

Définissons par t la fonction représentant la courbe représentative du repose-pied :

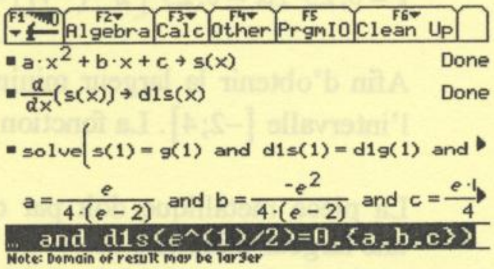
$$t:[-4;-2]\to\mathbb{R}; x\mapsto t(x)=2e^{-2}x+8e^{-2}$$

b) Supposons qu'il s'agit d'une fonction du deuxième degré : $s(x)=ax^2+bx+c$

Comme la jointure support-siège se fasse en $x=1$, s doit vérifier les deux conditions suivantes :

$s(1)=g(1)$

$s'(1)=g'(1)$

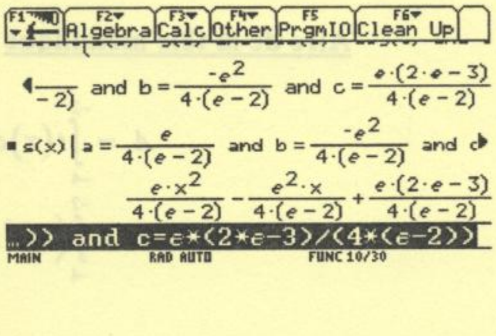


De plus la fonction s admet un minimum en $x=\dfrac{e}{2}$;

$$s'\left(\frac{e}{2}\right)=0.$$

Résolvons donc, à l'aide de la V200, le système suivant :

$$\begin{cases} s(1)=g(1) \\ s'(1)=g'(1) \\ s'\left(\frac{e}{2}\right)=0 \end{cases}$$

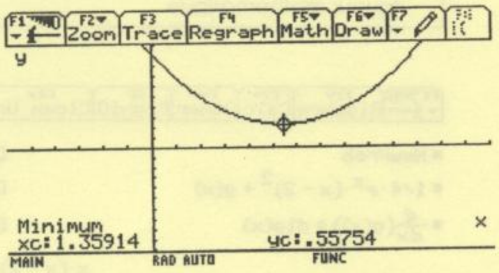


D'où : $a=\dfrac{e}{4(e-2)}$; $b=\dfrac{-e^2}{4(e-2)}$ et $c=\dfrac{e(2e-3)}{4(e-2)}$

et la fonction s sera définie par

$$\boxed{s(x)=\frac{e}{4(e-2)}x^2-\frac{e^2}{4(e-2)}x+\frac{e(2e-3)}{4(e-2)}}$$

On pourrait encore justifier brièvement que la fonction s admet un minimum en $x=\dfrac{e}{2}$:



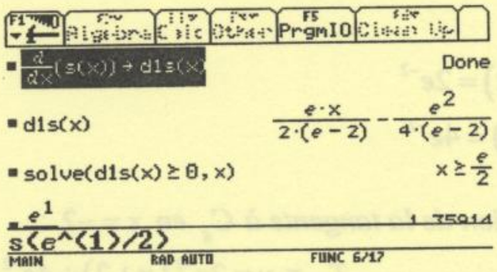
$$\frac{e}{2}\simeq 1{,}35914$$

$$s\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{-e(e-6)}{16}\simeq 0{,}55754$$

<u>ou bien</u> :

$$s'(x)=\frac{ex}{2(e-2)}-\frac{e^2}{4(e-2)}$$

$$s'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{e}{2}$$



La dérivée de la fonction s s'annule et change de signe en $x=\dfrac{e}{2}$, s admet donc un extremum en $x=\dfrac{e}{2}$.

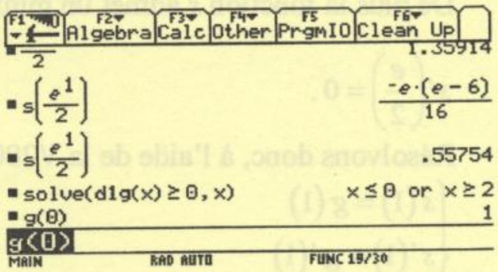
c) Il faut d'abord déterminer le point d'intersection de C_g avec l'axe des abscisses :

$$g(x)=0\Leftrightarrow x=2$$

La pièce métallique doit par conséquent avoir une longueur minimale de $l=0{,}25\cdot\Delta x=0{,}25\cdot\left[2-(-4)\right]=0{,}25\cdot 6=1{,}5$ mètres.

Afin d'obtenir la largeur minimale, il faut rechercher le maximum de la fonction g sur l'intervalle $\left[-2;4\right]$. La fonction g admet un maximum en $x=0$ qui vaut 1.

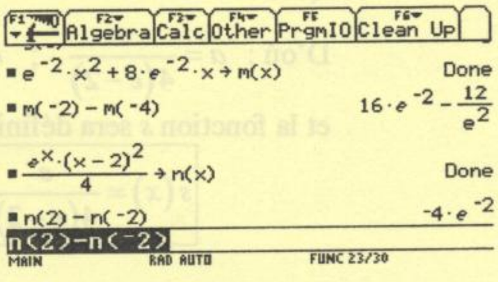
La pièce métallique doit par conséquent avoir une largeur minimale de $l=0{,}25\cdot\Delta y=0{,}25\cdot 1=0{,}25$ mètres.



<u>**Aire de la tôle métallique**</u> :

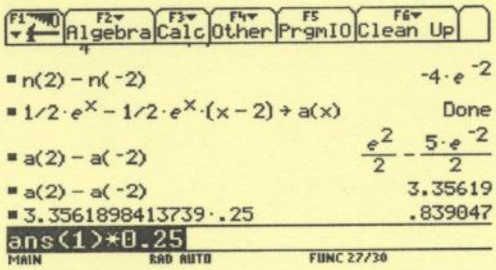
$$A=\int_{-4}^{-2}t(x)\,dx+\int_{-2}^{2}g(x)\,dx$$

$$=\int_{-4}^{-2}\left(2e^{-2}x+8e^{-2}\right)dx+\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}e^{x}\cdot(x-2)^2\,dx$$



$$= \left[e^{-2}x^2 + 8e^{-2}x \right]_{-4}^{-2} + \frac{1}{4}\left[e^x (x-2)^2 \right]_{-2}^{2} - \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^x \cdot (x-2)\,dx$$

$$= 4e^{-2} - 4e^{-2} - \frac{1}{2}\left[e^x (x-2) \right]_{-2}^{2} + \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^x\,dx$$



$$= -\frac{1}{2}\left[e^x (x-2) \right]_{-2}^{2} + \frac{1}{2}\left[e^x \right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{2}e^{-2}$$

$$\simeq 3,35619$$

D'où l'aire de la tôle métallique vaut : $3,35619\,(0,25)^2 \simeq \cancel{0,84\ \text{m}^2}$. $0,21\ \text{m}^2$