

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2005

Section: B

Branche: Mathématiques II

Nom et prénom du candidat

I) a) Définissez la fonction Arctan.

b) Calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } 3x}{2x}$.

c) Considérons la fonction f définie par $f(x) = 3\text{Arc tan } x - \pi$.

1. Déterminez dom f et im f .
2. Donnez l'expression de la fonction réciproque de f .
3. Déterminez dom f^{-1} et im f^{-1} .
4. Calculez l'aire de la surface comprise entre le graphique de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

Points : 1 + 2 + 7 = 10

II) Considérons la fonction f définie par $f(2) = \frac{\pi}{2}$ et $f(x) = \text{Arc tan } \frac{1}{(x-2)^2}$ pour les réels x différents de 2.

1. Déterminez le domaine de définition et les limites aux bornes du domaine.
2. Etudiez la continuité et la dérivabilité de f en 2.
3. Calculez la dérivée de f pour x différent de 2 et dressez le tableau de variation.
4. Déterminez une équation de la tangente au point d'abscisse 1.
5. Représentez graphiquement la fonction f .

Points : 1 + 3 + 2 + 2 + 2 = 10

III) a) Quelle est la dérivée de la fonction \log_a , de la fonction \exp_a ($a > 0$ et $a \neq 1$) ?

b) Déterminez le domaine de définition et de dérivabilité, puis calculez la dérivée des fonctions suivantes:

1. $f(x) = 3^{\text{Arc sin } x}$

2. $f(x) = (\log_5(x^2 + 5))^3$

c) 1. Résolvez l'équation $6 \cdot 25^x - 22 \cdot 5^x = 40$.

2. Résolvez le système :

$$\begin{cases} \log_9 y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_3 x \\ x \cdot y = 48 \end{cases}$$

Points : 1 + 4 + 6 = 11

IV) a) Calculez les primitives :

1. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$

2. $\int \cos 3x \cdot \cos x dx$

b) Calculez les intégrales :

1. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \text{Arc cos } x} dx$

2. $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{9-x^4}} dx$

3. $\int_0^2 \sqrt{16-x^2} dx$

Points : 3 + 8 = 11

V) Considérons la fonction f définie par $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$.

1. Déterminez le domaine de définition et étudiez l'existence d'asymptotes.

2. Déterminez la dérivée de f et dressez le tableau de variation.

3. Représentez graphiquement la fonction f .

Points : 7 + 3 + 2 = 12

VI) Considérons la fonction f définie par $f(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$ et λ un nombre réel négatif.

1. Étudiez le signe de f .

2. Calculez le volume $V(\lambda)$ du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface délimitée par le graphique de la fonction f , l'axe des x et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 0$.

Déduisez-en $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} V(\lambda)$.

Points : 6