LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES **Sessions 2022** **CORRIGÉ – BARÈME**		
DISCIPLINE	**SECTION(S)**	**ÉPREUVE ÉCRITE**	
Mathématiques 1	CD	*Date de l'épreuve :*	15.06.22
		Durée de l'épreuve :	08:15 - 10:10

I.

1) Soit bi $(b \in \mathbb{R})$ une racine imaginaire pure de P.

$P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 + (2-11i)(bi)^2 - 3(13+5i)(bi) - 18(1-3i) = 0$

$\Leftrightarrow -ib^3 - 2b^2 + 11b^2i - 39bi + 15b - 18 + 54i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3 + 11b^2 - 39b + 54 = 0 & (pi) \\ -2b^2 + 15b - 18 = 0 & (pr) \end{cases}$

$(pr) \underset{\Delta = 81}{\Leftrightarrow} b = \frac{3}{2} \vee b = 6.$

Dans (pi): $-\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 11 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 39 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 54 = \frac{135}{8}$ et
$-(6)^3 + 11 \cdot (6)^2 - 39 \cdot (6) + 54 = 0.$

$z_0 = 6i.$

Schéma de Horner:

	1	$2-11i$	$-39-15i$	$-18+54i$
$6i$		$6i$	$30+12i$	$18-54i$
	1	$2-5i$	$-9-3i$	0

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 6i$ ou $z^2 + (2-5i)z - (9+3i) = 0.$

$\Delta = (2-5i)^2 + 4 \cdot (9+3i) = 15 - 8i.$

Soit $\delta = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ une racine carrée complexe de $15 - 8i$.

Alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = |15-8i| = 17 & (1) \\ x^2 - y^2 = 15 & (2) \\ 2xy = -8 < 0 & (3) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow x = \pm 4$; $(1) - (2) \Rightarrow y = \pm 1$; de (3), x et y ont des signes contraires.

$\delta = \pm(4 - i).$

Les solutions du trinôme du second degré sont $\frac{-2+5i \pm (4-i)}{2} = \begin{cases} 1+2i \\ -3+3i \end{cases}$

$S = \{6i; 1+2i; -3+3i\}$

2) Posons $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} -2iz - \bar{z} = -1 + i \quad &\Leftrightarrow \quad -2i(a+bi) - (a-bi) = -1+i \\ &\Leftrightarrow \quad -2ai + 2b - a + bi = -1 + i \\ &\Leftrightarrow \quad -a + 2b + (-2a+b)i = -1 + i \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a+2b = -1 \\ -2a+b = 1 \end{cases} \\ &\underset{(2)\,/\,\underbrace{(1)-2(2)}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} -a+2b = -1 \\ 3a = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -1 \\ a = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$S = \{-1 - i\}$

II.

1)

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ m+1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -m\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2\\ m+1 & -1\\ 2 & -1\end{matrix}$$

$$=m-4+m+1-2-1+2m^2+2m$$

$$=2m^2+4\mathrm{m}-6$$

$$=2(m^2+2\mathrm{m}-3)$$

$$=2(m-1)(m+3)$$

$\det A=0 \Leftrightarrow m=1 \vee m=-3$

Le système admet une solution unique si et seulement si $m\in\mathbb{R}\backslash\{-3;1\}$.

2)

$5\alpha+5=k$

$\Leftrightarrow\ \alpha=\frac{1}{5}k-1$

Si $m=1$, $\det A=0$ et le système n'admet pas une solution unique.

$$(s)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+2y-z=-1\\2x-y-z=3\\2x-y-z=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+2y-z=-1\\2x-y-z=3\end{cases}$$

$$\underset{(2)/\underbrace{2\cdot(1)-(2)}}{\Leftrightarrow}\quad\begin{cases}x+2y-z=-1\\5y-z=-5\end{cases}$$

$z=5\alpha+5=k$

$y=\frac{1}{5}k-1$

$x=3\left(\frac{1}{5}\alpha-1\right)+4$

Le système est simplement indéterminé.

Posons $y=\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

De (2) : $z=5\alpha+5$.

Dans (1) : $x=-2\alpha+5\alpha+5-1\Leftrightarrow x=3\alpha+4$.

$S=\{(3\alpha+4;\alpha;5\alpha+5)/\alpha\in\mathbb{R}\}$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans se coupant suivant une droite passant par le point $B(4;0;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$.

$\frac{3}{5}\alpha+1$

3)

Si $m=3$, $\det A\neq 0$ et le système admet une solution unique.

$$(s)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+2y-z=-1\\4x-y-z=3\\2x-y-3z=3\end{cases}$$

$$\underset{\substack{(2)/\underbrace{4\cdot(1)-(2)}\\(3)/2\cdot(1)-(3)}}{\Leftrightarrow}\quad\begin{cases}x+2y-z=-1\\9y-3z=-7\\5y+z=-5\end{cases}$$

$$\underset{(3)/\underbrace{(2)+3\cdot(3)}}{\Leftrightarrow}\quad\begin{cases}x+2y-z=-1\\9y-3z=-7\\24y=-22\end{cases}$$

De (3) : $y=-\frac{11}{12}$.

Dans (2) :

$$-\frac{33}{4}-3z=-7\Leftrightarrow 3z=-\frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{5}{12}$$

Dans (1) : $x=\frac{22}{12}-\frac{5}{12}-1\Leftrightarrow x=\frac{5}{12}$.

$S=\left\{\left(\frac{5}{12};-\frac{11}{12};-\frac{5}{12}\right)\right\}$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de trois plans ayant un unique point en commun à savoir le point $I\left(\frac{5}{12};-\frac{11}{12};-\frac{5}{12}\right)$.

III.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-5\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})\ /\ \overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}\\
&\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})\ /\ \begin{cases} -3 = k \cdot (-2)\\ -5 = k \cdot 4\\ -4 = k \cdot 1\end{cases}\\
&\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R})\ /\ \begin{cases} k = \frac{3}{2}\\ k = -\frac{5}{4}\\ k = -4\end{cases} \text{ impossible}
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

$$\begin{aligned}
M(x\,;y\,;z) \in \pi \quad &\Leftrightarrow \quad det\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3\\ y-2 & 4 & -5\\ z-1 & 1 & -4\end{vmatrix}\begin{matrix} x-1 & -2\\ y-2 & 4\\ z-1 & 1\end{matrix} = 0\\
&\Leftrightarrow \quad -16(x-1) + 10(z-1) - 3(y-2)\\
&\qquad\quad +12(z-1) + 5(x-1) - 8(y-2) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad -11(x-1) - 11(y-2) + 22(z-1) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (x-1) + (y-2) - 2(z-1) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x + y - 2z - 1 = 0
\end{aligned}$$

$\pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à π, donc un vecteur directeur de *d*.

Un système d'équations paramétriques de *d* est donc :

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha + 1\\ y = \alpha + 2\\ z = -2\alpha + 1\end{cases} \text{ avec } (\alpha \in \mathbb{R})$$

3) Les plans π et π' sont parallèles, donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal à π'.

$$\begin{aligned}
M(x\,;y\,;z) \in \pi' &\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \perp \vec{n}\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} \cdot \vec{n} = 0\\
&\Leftrightarrow (x-6)\cdot 1 + (y-1)\cdot 1 + (z+2)\cdot(-2) = 0\\
&\Leftrightarrow x + y - 2z - 11 = 0
\end{aligned}$$

$\pi' \equiv x + y - 2z - 11 = 0$

4)

$$M(x\,;y\,;z) \in d \cap \pi' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = -2\alpha + 1 \\ x + y - 2z - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = -2\alpha + 1 \\ \alpha + 1 + \alpha + 2 + 4\alpha - 2 - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2 \\ z = -2\alpha + 1 \\ 6\alpha = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = -\frac{7}{3} \\ \alpha = \frac{5}{3} \end{cases}$$

d perce le plan π' au point $I\left(\frac{8}{3}\,;\frac{11}{3}\,;-\frac{7}{3}\right)$.

5) Un vecteur normal au plan π est un vecteur directeur de π''.

$$\begin{aligned} M(x\,;y\,;z) \in \pi'' \quad &\Leftrightarrow \quad det\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB}\,;\vec{n}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\begin{matrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-2 & 4 & 1 \\ z-1 & 1 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} x-1 & -2 \\ y-2 & 4 \\ z-1 & 1 \end{matrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -8(x-1) - 2(z-1) + (y-2) \\ &\qquad\;\; -4(z-1) - (x-1) - 4(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -9(x-1) - 3(y-2) - 6(z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3(x-1) + (y-2) + 2(z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x + y + 2z - 7 = 0 \end{aligned}$$

$\pi'' \equiv 3x + y + 2z - 7 = 0$

6) La droite p est une droite du plan π'. En fait, $p = (ID)$.

Un vecteur directeur de la droite p est $\overrightarrow{ID}\left(\frac{10}{3}\,;-\frac{8}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

D'où un système d'équations paramétriques de la droite p :

$$p \equiv \begin{cases} x = \frac{10}{3}\alpha + 6 \\ y = -\frac{8}{3}\alpha + 1 \text{ avec } (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = \frac{1}{3}\alpha - 2 \end{cases}$$

IV.

1)

$$z_1 = \frac{4\sqrt{3}+20i}{-1+3i\sqrt{3}} \cdot \frac{-1-3i\sqrt{3}}{-1-3i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{-4\sqrt{3}-36i-20i+60\sqrt{3}}{1+27}$$
$$= \frac{56\sqrt{3}-56i}{28}$$
$$= 2\sqrt{3}-2i \quad \text{f.a. de } z_1 \qquad\qquad |2\sqrt{3}-2i| = 4$$
$$= 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$= 4cis\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{f.t. de } z_1$$

2)

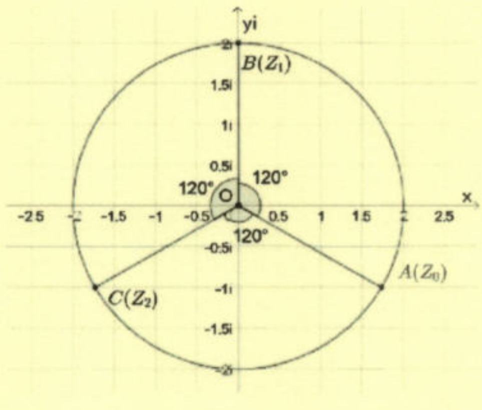
$$z_2 = -4\sqrt{3}cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 4\sqrt{3}cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{f.t. de } z_2$$
$$\frac{(z_1)^5}{(z_2)^4} = \frac{\left(4cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^5}{\left(4\sqrt{3}cis\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)^4}$$
$$= \frac{4^5\cdot cis\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{(4\sqrt{3})^4\cdot cis\left(-\frac{8\pi}{3}\right)}$$
$$= \frac{4}{9}cis\left(-\frac{5\pi}{6}+\frac{8\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{4}{9}cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{9}-\frac{2}{9}i$$

3)

$$z_3 = 2\sqrt{3}-2i+4\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= 2\sqrt{3}-2i-2\sqrt{3}-6i$$
$$= -8i$$
$$= 8cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Les racines cubiques complexes de z_3 sont :

$$Z_k = 2cis\left(-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{avec } k \in \{0;1;2\}$$
$$Z_0 = 2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}-i$$
$$Z_1 = 2cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$
$$Z_2 = 2cis\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2cis\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-i$$



V.

1)

$$z_1=\frac{9\sqrt{2}-i\sqrt{6}}{5+i\sqrt{3}}\cdot\frac{5-i\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{45\sqrt{2}-9i\sqrt{6}-5i\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{25+3}$$
$$=\frac{42\sqrt{2}-14i\sqrt{6}}{28}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i \quad \text{f.a. de } z_1 \qquad\qquad \left|\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{18}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{6}$$
$$=\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=\sqrt{6}cis\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{f.t. de } z_1$$

et

$$Z=\frac{(\sqrt{6})^8cis\left(-\frac{8\pi}{6}\right)}{6cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$=\frac{6^4cis\left(-\frac{4\pi}{3}\right)}{6cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$=6^3\frac{cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$=216cis\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$=216cis\left(\frac{-\pi}{12}\right) \quad \text{f.t. de } Z.$$

2)

$$Z=216\frac{cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$
$$=216\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$
$$=216\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$
$$=216\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}-i\sqrt{6}+\sqrt{6}}{4}$$
$$=54(\sqrt{2}+\sqrt{6})+54(\sqrt{2}-\sqrt{6})i \quad \text{f.a. de } Z.$$

3)

$$216cis\left(\frac{-\pi}{12}\right)=54(\sqrt{2}+\sqrt{6})+54(\sqrt{2}-\sqrt{6})i\Leftrightarrow cis\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}-2$$

4)

$$\begin{aligned} 2\cdot z_1 + z_2 &= 2\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right) + 6\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 3\sqrt{2} - i\sqrt{6} - 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} \\ &= (3\sqrt{2}-\sqrt{6})i \end{aligned}$$

et $(2\cdot z_1 + z_2)^2 = -(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2 \in \mathbb{R}_-^*$