Examen de fin d'études secondaires - Session de 2018 - Mathématiques I - Section D

CORRIGE MODELE

Exercice 1 (5+4+4=13 points)

1.
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\\frac{7}{2}\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}$$

A, B et C sont alignés $\iff (\exists k\in\mathbb{R})\quad \overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB} \iff (\exists k\in\mathbb{R})\quad \begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}-4\\1\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$

impossible, donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

$$\begin{aligned}
M(x;y;z)\in\pi &\iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires}\\
&\iff (\exists(k;l)\in\mathbb{R}^2)\qquad \overrightarrow{AM}=k\cdot\overrightarrow{AB}+l\cdot\overrightarrow{AC}\\
&\iff (\exists(k;l)\in\mathbb{R}^2)\qquad \boxed{\begin{cases} x &= 1-4k+4l\\ y &= -1+k+8l\\ z &= -3+\frac{7}{2}k+l\end{cases}}
\end{aligned}$$

(système d'équations paramétriques de π)

$$\begin{aligned}
M(x;y;z)\in\pi &\iff det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0\\
&\iff \begin{vmatrix} x-1 & -4 & 4\\ y+1 & 1 & 8\\ z+3 & \frac{7}{2} & 1\end{vmatrix}=0\\
&\iff (-27)(x-1)-(-18)(y+1)+(-36)(z+3)=0\\
&\iff 3\cdot(x-1)-2\cdot(y+1)+4\cdot(z+3)=0\\
&\iff \boxed{3x-2y+4z+7=0}
\end{aligned}$$

(équation cartésienne de π)

2. vecteur normal de π : $\quad \overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de d.

$$\begin{aligned}
M(x;y;z)\in d &\iff \overrightarrow{DM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont colinéaires}\\
&\iff (\exists k\in\mathbb{R})\quad \overrightarrow{DM}=k\cdot\overrightarrow{n}\\
&\iff (\exists k\in\mathbb{R})\quad \boxed{\begin{cases} x &= -\frac{5}{2}+3k\\ y &= 5-2k\\ z &= -1+4k\end{cases}}
\end{aligned}$$

(système d'équations paramétriques de d)

Système d'équations cartésiennes de d :

$$\frac{x+\frac{5}{2}}{3}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+1}{4}$$

D'où :

$$\begin{cases} -2\left(x+\frac{5}{2}\right)=3(y-5) \\ 4\left(x+\frac{5}{2}\right)=3(z+1) \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} 2x+3y-10=0 \\ 4x-3z+7=0 \end{cases}} \qquad \text{(système d'équations cartésiennes de } d\text{)}$$

3.

$$E(x;y;z)\in d\cap\pi \iff \begin{cases} 3x-2y+4z+7=0 & (1) \\ x=-\frac{5}{2}+3k & (2) \\ y=5-2k & (3) \\ z=-1+4k & (4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\cdot(-\frac{5}{2}+3k)-2\cdot(5-2k)+4\cdot(-1+4k)+7=0 & (2),(3),(4)\text{dans } (1) \\ x=-\frac{5}{2}+3k & (2) \\ y=5-2k & (3) \\ z=-1+4k & (4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 29k=\frac{29}{2} & (1') \\ x=-\frac{5}{2}+3k & (2) \\ y=5-2k & (3) \\ z=-1+4k & (4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ x=-1 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\text{La droite } d \text{ perce le plan } \pi \text{ au point } E(-1;4;1)}$

Exercice 2

1.

$$\Delta=\begin{vmatrix} m+2 & -m & 0 \\ -2 & 2m & -2 \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = (m+2)(2m+2m)+2(-m)+m(2m)$$

$$=4m(m+2)-2m+2m^2$$

$$=6m^2+6m$$

$$=6m\cdot(m+1)$$

Le système admet une solution unique $\iff \Delta\neq 0 \iff m\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

$\boxed{\text{Si } m \in \mathbb{R} \setminus \{0;-1\}}$:

$$\begin{aligned}
\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ 6m & 2m & -2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} &= (2m+2m) - 6m\cdot(-m) + 2m \\
&= 4m + 6m^2 + 2m \\
&= 6m^2 + 6m \\
&= 6m\cdot(m+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_y = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 0 \\ -2 & 6m & -2 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} &= (m+2)(6m+2) + 2\cdot 1 + m\cdot(-2) \\
&= 6m^2 + 2m + 12m + 4 + 2 - 2m \\
&= 6m^2 + 12m + 6 \\
&= 6\cdot(m+1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_z = \begin{vmatrix} m+2 & -m & 1 \\ -2 & 2m & 6m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} &= (m+2)\cdot(2m-6m^2) + 2\cdot(-2m) + m\cdot(-6m^2-2m) \\
&= 2m\cdot(m+2)\cdot(1-3m) - 4m - 2m^2\cdot(3m+1) \\
&= 2m\cdot[(m+2)(1-3m) - 2 - m(3m+1)] \\
&= 2m\cdot(-6m^2-6m) \\
&= -12m^2\cdot(m+1)
\end{aligned}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6m(m+1)}{6m(m+1)} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6(m+1)^2}{6m(m+1)} = \frac{m+1}{m}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-12m^2(m+1)}{6m(m+1)} = -2m$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left(1; \tfrac{m+1}{m}; -2m\right)\right\}}$$

2. $\boxed{\text{Si } m = 0}$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} 2x = 1 & (1) \\ -2x - 2z = 0 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} & (1) \\ -2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1 = 0 & \text{(1) et (3) dans (2)} \qquad \text{non vérifié} \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

Le système est impossible.

$\boxed{\mathcal{S} = \varnothing}$

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace n'ayant aucun point commun.

$\boxed{\text{Si } m=-1}$, le système s'écrit :

$$\begin{cases} x+y=1 & (1)\\ -2x-2y-2z=-6 & (2)\\ -x-y+z=1 & (3)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & (1)\\ x+y+z=3 & (2)\\ x+y-z=-1 & (3)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & (1)\\ z=2 & (2')\leftrightarrow(2)-(1)\\ 2x+2y=2 & (3')\leftrightarrow(2)+(3)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & (1)\\ z=2 & (2')\\ x+y=1 & (3')\end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé. Posons $x=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x=\alpha\\ y=1-\alpha\\ z=2\end{cases}$$

$\boxed{\mathcal{S}=\{(\alpha;1-\alpha;2)\ /\alpha\in\mathbb{R}\}}$

Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent suivant la droite d de repère $(A;\overrightarrow{u})$, avec $A(0;1;2)$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Exercice 3 (13 points)

1. $$\begin{aligned} P(\sqrt{3}\,i) &= (\sqrt{3}\,i)^4-6\cdot(\sqrt{3}\,i)^3+24\cdot(\sqrt{3}\,i)^2-18\cdot\sqrt{3}\,i+63\\ &=9\,i^4-6\cdot3\sqrt{3}\,i^3+24\cdot3\,i^2-18\sqrt{3}\,i+63\\ &=9+18\sqrt{3}\,i-72-18\sqrt{3}\,i+63\\ &=0\end{aligned}$$

   De même :

   $$\begin{aligned} P(-\sqrt{3}\,i) &= (-\sqrt{3}\,i)^4-6\cdot(-\sqrt{3}\,i)^3+24\cdot(-\sqrt{3}\,i)^2-18\cdot(-\sqrt{3}\,i)+63\\ &=9\,i^4+6\cdot3\sqrt{3}\,i^3+24\cdot3\,i^2+18\sqrt{3}\,i+63\\ &=9-18\sqrt{3}\,i-72+18\sqrt{3}\,i+63\\ &=0\end{aligned}$$

2. Comme $P(\sqrt{3}\,i)=0$ et $P(-\sqrt{3}\,i)=0$, $P(z)$ est divisible par $z-\sqrt{3}\,i$ et par $z+\sqrt{3}\,i$

   Schéma de Horner (ou bien division par $(z-\sqrt{3}\,i)\cdot(z+\sqrt{3}\,i)=z^2+3$) :

	1	-6	24	-18	63
$\sqrt{3}\,i$		$\sqrt{3}\,i$	$-3-6\sqrt{3}\,i$	$18+21\sqrt{3}\,i$	-63
	1	$-6+\sqrt{3}\,i$	$21-6\sqrt{3}\,i$	$21\sqrt{3}\,i$	$\Vert\ 0$
$-\sqrt{3}\,i$		$-\sqrt{3}\,i$	$6\sqrt{3}\,i$	$-21\sqrt{3}\,i$	
	1	-6	21	$\Vert\ 0$	

On en déduit que :

$P(z) = (z - \sqrt{3}\, i) \cdot (z + \sqrt{3}\, i) \cdot (z^2 - 6z + 21)$

Posons $z^2 - 6z + 21 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 21 = 36 - 84 = -48 = (4\sqrt{3}\, i)^2$

D'où :

$z_1 = \frac{6-4\sqrt{3}\, i}{2} = 3 - 2\sqrt{3}\, i \quad \vee \quad z_2 = \frac{6+4\sqrt{3}\, i}{2} = 3 + 2\sqrt{3}\, i$

$P(z) = (z - \sqrt{3}\, i) \cdot (z + \sqrt{3}\, i) \cdot (z - 3 + 2\sqrt{3}\, i) \cdot (z - 3 - 2\sqrt{3}\, i).$

On en déduit :

$P(z) = 0 \Longleftrightarrow z = \sqrt{3}\, i \ \vee\ z = -\sqrt{3}\, i \ \vee\ z = 3 - 2\sqrt{3}\, i \ \vee\ z = 3 + 2\sqrt{3}\, i$

Finalement : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\sqrt{3}\, i;\ -\sqrt{3}\, i;\ 3 - 2\sqrt{3}\, i;\ 3 + 2\sqrt{3}\, i\right\}}$

Exercice 4 (8 points)

Calculs à part :

- $i^{2018} = (i^2)^{1009} = (-1)^{1009} = -1$
- $1 - i = \sqrt{2}\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- $$\begin{aligned} (1-i)^{2018} &= (\sqrt{2})^{2018}\, cis\left(-\tfrac{2018\pi}{4}\right) \\ &= 2^{1009}\, cis\left(-\tfrac{1009\pi}{2}\right) \\ &= 2^{1009}\, cis\left(-\tfrac{1008\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= 2^{1009}\, cis\left(-252 \cdot 2\pi - \tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= 2^{1009}\, cis\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &= -\,2^{1009} \cdot i \end{aligned}$$

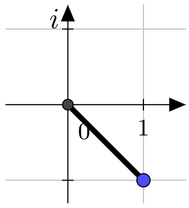
On en déduit que :

$$z = \frac{1 - i^{2018}}{(1-i)^{2018}} = \frac{1-(-1)}{-2^{1009}\, i} = -\frac{1}{2^{1008}\, i} \cdot \frac{i}{i} = \boxed{\frac{1}{2^{1008}}\, i} \qquad \text{(forme algébrique)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2^{1008}}\, cis \frac{\pi}{2}} \qquad \text{(forme trigonométrique)}$$

Exercice 5 (1+3+3+3=10 points)

1. $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\, cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (forme trigonométrique)



2. $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{2+\sqrt{3}+i}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{2+\sqrt{3}+i+2i+\sqrt{3}\,i-1}{1-i^2} = \boxed{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\, i}$

   (forme algébrique)

3. $(1+\sqrt{3})\, cis\frac{\pi}{3} = (1+\sqrt{3}) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = (1+\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2}\, i$

   Ainsi : $\boxed{(1+\sqrt{3})\, cis\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{z_2}{z_1}}$ (forme trigonométrique)

4. Par les points (3) et (1), on a :

   $(1+\sqrt{3})\, cis\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{z_2}{z_1}$ et $z_1 = \sqrt{2}\, cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

   Ainsi : $(1+\sqrt{3})\, cis\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{z_2}{\sqrt{2}\, cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

   Donc : $z_2 = \sqrt{2}\, cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \cdot (1+\sqrt{3})\, cis\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{2} \cdot (1+\sqrt{3})\, cis\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \boxed{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\, cis\dfrac{\pi}{12}}$.

   (forme trigonométrique)