



BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 1	C	<i>Durée de l'épreuve :</i> 2h05 <i>Date de l'épreuve :</i> 09 juin 2020

Numéro d'ordre du candidat : _____

Instructions :

- L'élève répond à **toutes** les questions de la **partie 1**
- L'élève répond à **exactement 2 questions** de la **partie 2**. Il indique ses choix en cochant les cases appropriées ci-dessous

Seules les réponses correspondant aux questions choisies par l'élève seront évaluées. Toute réponse à une question non choisie par l'élève est cotée à 0 point. En l'absence de choix clairement renseigné sur la page de garde la partie au choix est cotée à 0 point.

Partie 1 (obligatoire)

Exercice I : **Nombres complexes** 30 points

Partie 2 (exactement 2 exercices au choix)

- Exercice II : **Nombres complexes** 15 points
- Exercice III : **Géométrie analytique dans l'espace** 15 points
- Exercice IV : **Systèmes linéaires** 15 points
- Exercice V : **Calculs de probabilités** 15 points
- Exercice VI : **Combinatoire** 15 points

Partie 1 (obligatoire)**I. Nombres complexes.**

1) Soit le polynôme

$$P(z) = i \cdot z^3 - (3 + i) \cdot z^2 - (5 - 2i) \cdot z - 8 - 14i \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Résoudre $P(z) = 0$ sachant que P admet une racine imaginaire pure.

2) Soit le nombre complexe

$$Z = \frac{10\sqrt{3} + 6i}{\sqrt{3} + 2i} - \frac{14 + 14\sqrt{3}i}{2 - \sqrt{3}i}$$

a) Écrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.b) Déterminer les racines quatrièmes complexes de Z sous forme trigonométrique.

3) Calculer et donner le résultat sous forme algébrique et sous forme trigonométrique:

$$Z = \frac{(1 + i)^{2020}}{1 + i^{2020}}$$

4) Calculer et donner le résultat sous forme trigonométrique et sous forme algébrique:

$$Z = \frac{(2 \cdot \text{cis}(\frac{\pi}{3}))^4 \cdot (\sqrt{2} \cdot \text{cis}(\frac{\pi}{4}))^5}{(2 \cdot \text{cis}(\frac{\pi}{6}))^5}$$

 $12+(6+4)+4+4=30$ points

Partie 2 (exactement 2 exercices au choix)

II. Nombres complexes.

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante et écrire l'ensemble des solutions:

$$(1 - i) \cdot \bar{z} = (2 + i) \cdot z + 3$$

- 2) Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{\sqrt{3} - i}$ et $z_2 = \sqrt{2} \cdot \text{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$.

- a) Écrire z_1 sous forme trigonométrique.
 b) Soit $Z = \frac{z_1}{z_2}$. Écrire Z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
 c) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.

5+10=15 points

III. Géométrie analytique de l'espace.

Dans un repère orthonormé de l'espace on donne les points $A(2; -1; 0)$; $B(1; 0; -2)$; $C(0; 2; 1)$; $D(-3; -2; 2)$ et le plan $\alpha \equiv 4x + 3y + z = 3$.

- 1) Vérifier que les points A ; B et C ne sont pas alignés.
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan Π passant par A ; B et C .
- 3) Est-ce que $D \in \Pi$?
- 4) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d passant par D et qui est orthogonale au plan α .
- 5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan Π .
- 6) Soit les plans $\pi_1 \equiv 3x + 2y + z = 4$ et $\pi_2 \equiv x + 2y - z = 0$.
 Déterminer $\pi_1 \cap \pi_2$. Donner les éléments caractéristiques de cette intersection.

(1+2+1+2+4+5)=15 points

IV. Systèmes linéaires.

Soit le système paramétré suivant:

$$\begin{cases} x + y + a \cdot z & = & 0 \\ x + a \cdot y + z & = & 2 \cdot a \\ (a + 1) \cdot x + a \cdot y + z & = & a \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

- 1) Déterminer a pour que le système admette une solution unique.
- 2) Résoudre et interpréter géométriquement le système pour $a = 0$ et $a = 1$.
- 3) Résoudre et interpréter géométriquement le système pour $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$

15 points

V. **Probabilités.**

Une urne contient 4 boules rouges, 6 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.

- 1) On tire 3 boules successivement sans remise de l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir:
 - a) Aucune boule noire.
 - b) Une boule de chaque couleur.
 - c) 3 boules de même couleur.
 - d) Exactement 2 boules rouges.
- 2) On tire 3 boules successivement avec remise de l'urne.
Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur.

(3+3+3+3)+3=15 points

VI. **Combinatoire.**

Un entraîneur d'une équipe de handball a 16 joueurs à sa disposition dont 3 gardiens de but et 13 joueurs de champ (Feldspieler). Parmi les gardiens il y a un étranger et parmi les joueurs de champ il y a 4 étrangers, les autres joueurs sont des luxembourgeois. Pour former une équipe il faut choisir un gardien et 6 joueurs de champ.

- 1) Combien d'équipes peut-on former?
- 2) Combien d'équipes peut-on former contenant uniquement des luxembourgeois?
- 3) Combien d'équipes peut-on former contenant exactement 3 étrangers?
- 4) Combien d'équipes peut-on former si le gardien Misch ne veut jouer ni avec le joueur de champ Jang, ni avec le joueur de champ Pit?
- 5) De combien de manières peut-on distribuer des tricots numérotés de 1 à 16 aux 16 joueurs sachant que les trois premiers tricots sont réservés pour les gardiens?

(2+2+4+4+3)=15 points
