LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**C**	*Durée de l'épreuve : 1 heure 45 min* *Date de l'épreuve : 14 octobre 2019*

Question 1 12 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure :

$$2\,z^3 - (2+5i)\,z^2 + 15i\,z + 7 - i = 0$$

Question 2 $3+3+3=9$ points

Considérons les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -4\sqrt{3} - 4i \qquad z_2 = -2\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad Z = \frac{(z_1)^3}{i^{2019}\cdot(z_2)^4}$$

(a) Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

(b) En déduire que Z est un nombre réel.

(c) Déterminer les racines cubiques complexes de Z sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique.

Question 3 $2+5+4+4=15$ points

Dans un repère orthonormé de l'espace, considérons les plans $\mathcal{P}\colon x+3y-2z+1=0$ et $\mathcal{Q}\colon x+y+2z-1=0$. Soit $\mathcal{R}$ le plan défini par :

$$\mathcal{R}\colon \begin{cases} x = -6+2k-k' \\ y = 3-2k \\ z = 1+k+k' \end{cases} \qquad (k, k' \in \mathbb{R})$$

(a) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles.

(b) Déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection d.

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$.

(d) La droite d perce-t-elle le plan $\mathcal{R}$?

Question 4 4 points

Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles le système suivant admet une solution unique :

$$\begin{cases} mx - y + z = m \\ -x + 2y + mz = 2 \\ x + y + mz = 1 \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{R})$$

Question 5 $5 + 4 = 9$ points

(a) Quel est le terme en x^7 du développement de $\left(2x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9$?

(b) D'un jeu bien mélangé de 32 cartes, on tire au hasard et simultanément 5 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux valets et deux piques ?

Question 6 $(2 + 2 + 2) + (4 + 1) = 11$ points

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules blanches et 1 boule noire, toutes indiscernables au toucher. On extrait au hasard deux boules de cette urne.

(a) Quelle est la probabilité de tirer 2 boules de même couleur, si elles sont tirées :

- **(i)** simultanément ?
- **(ii)** successivement et sans remise ?
- **(iii)** successivement et avec remise ?

(b) On ajoute x $(x > 2)$ boules vertes dans cette urne. On cherche la valeur de x telle que la probabilité de l'événement V : « tirer simultanément 2 boules vertes de l'urne » soit égale à $\frac{1}{5}$.

- **(i)** Montrer que :

$$P(V) = \frac{1}{5} \iff x^2 - 5x - 14 = 0$$

- **(ii)** En déduire le nombre de boules vertes ajoutées dans l'urne.