LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES 2020	
BRANCHE	**SECTION(S)**	**ÉPREUVE ÉCRITE**
Mathématiques I	**B**	*Durée de l'épreuve :* 3 heures *Date de l'épreuve :* 18/09/2020

Question I (13+3+4 = 20 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - z^3 + (7+4i)z^2 - (11+6i)z + 30i = 0$, sachant qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.

   b) On note $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ les points-image des solutions dans le plan de Gauss. Plus précisément, z_A et z_B sont les solutions imaginaires pures, avec $\operatorname{Im}(z_A) > \operatorname{Im}(z_B)$, et z_C et z_D sont les deux autres solutions, avec $\operatorname{Im}(z_C) > \operatorname{Im}(z_D)$.
   Représenter graphiquement la situation et étudier, en justifiant par des calculs, si le quadrilatère *ACBD* possède un angle droit.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 32$.

   Calculer ensuite le <u>produit</u> de toutes les solutions.

3) Soit $z' = z^3 - 1$, avec $z \in \mathbb{C}$.

   Dans le plan de Gauss, déterminer et construire l'ensemble $E = \{M(z) / z' \in \mathbb{R}\}$.

Question II (2+5+4+10 = 21 points)

1) Quel est le terme constant de $(4x^2 + \frac{1}{2x})^{12}$?

2) Une grille rectangulaire est formée de 3 lignes et de 5 colonnes. De combien de manières différentes peut-on y placer (avec au plus un jeton par case):

   a) 5 jetons indiscernables?

   b) 5 jetons de couleurs différentes?

   c) 5 jetons indiscernables, de telle sorte qu'il y ait un jeton par colonne?

   d) 5 jetons de couleurs différentes, de telle sorte qu'il y ait un jeton par colonne?

3) Cinq personnes vont au cinéma et décident de s'asseoir au 1er rang, qui comporte 12 fauteuils, tous encore vides. Chaque fauteuil est occupé par au plus une personne.

   a) De combien de manières peuvent se placer les cinq personnes?

   b) De combien de manières peuvent se placer les cinq personnes, sachant qu'elles sont toutes assises l'une à côté de l'autre?

4) Dans la population, une personne sur 100 est porteuse d'un certain virus. Un laboratoire doit analyser 50 échantillons de sang (de 50 personnes distinctes et choisies au hasard) pour y détecter ce virus. On note X le nombre d'échantillons dans lesquels le virus est détecté.

   a) Calculer la probabilité que le virus est détecté dans au plus 3 échantillons.

   b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

   c) Combien d'échantillons devrait-on analyser au minimum pour que la probabilité de détecter le virus dans au moins un échantillon dépasse les 98%?

   d) Pour faire des économies, le laboratoire a élaboré un nouveau procédé: Au lieu de faire tout de suite les 50 analyses, il prélève un peu de sang dans chaque échantillon, mélange le tout et fait l'analyse du mélange. Si le virus n'est pas détecté dans cette analyse, il ne se trouve dans aucun des 50 échantillons, et il a suffi d'une seule analyse. Si par contre le virus est détecté dans le mélange, on devra par la suite examiner encore chacun des 50 échantillons.

   On note Y le nombre d'analyses à faire avec le nouveau procédé. Calculer l'espérance de Y. Est-ce que le nouveau procédé est en moyenne plus économique que l'ancien ?

Question III (8+6+5 = 19 points)

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit Γ une conique de foyer $F(1;-1)$, de directrice associée $d \equiv x = 5$ et d'excentricité $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

   a) Déterminer la nature et l'équation réduite de Γ.

   b) Déterminer les coordonnées du centre et des sommets de Γ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   c) Représenter graphiquement Γ (unité: 4 cm).

2) Soit Γ une conique centrée à l'origine et d'axe focal (Oy). On sait que Γ passe par le point $A(-2;1)$ et admet une asymptote de pente $\frac{1}{4}$.

   a) Déterminer la nature et l'équation réduite de Γ (on ne demande pas de figure).

   b) Calculer les coordonnées du (des) foyer(s) de Γ ainsi que l'excentricité de Γ.

3) Calculer l'abscisse du (des) point(s) de tangence de la (des) tangente(s) à la parabole $\Gamma \equiv y = 2x^2 + 6x + 4$ perpendiculaire(s) à la droite (SI), où S désigne le sommet de Γ, et avec $I(1;0)$.