Corrigé

Question I (30 (14+10+6) points)

1)

a) Soit $bi \quad (b \in IR)$ une racine imaginaire pure de P.

$P(ib) = 0 \Leftrightarrow -ib^3 + 3(1-i)b^2 + 7b - 48 + 54i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 + 7b - 48 = 0 & (1) \\ -b^3 - 3b^2 + 54 = 0 & (2) \end{cases}$$

Les solutions de (1) sont 3 et $-\frac{16}{3}$. $-\frac{16}{3}$ n'est pas solution de (2) alors que 3 est solution de (2). Donc $P(3i) = 0$.

b)

- Schéma de Hörner:

	1	$-3+3i$	$-7i$	$-48+54i$
$3i$		$3i$	$-18-9i$	$48-54i$
	1	$-3+6i$	$-18-16i$	0

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 3i \quad \vee \quad z^2 - (3-6i)z - 18 - 16i = 0$.

$\Delta = (3-6i)^2 + 4\cdot(18+16i) = 45 + 28i$.

- Soit $\delta = x + iy \ (x; y \in IR)$ une racine carrée de $45 + 28i$. Alors

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |45+28i| = 53 & (1) \\ x^2 - y^2 = 45 & (2) \\ 2xy = 28 > 0 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow x = \pm 7$; $(1)-(2) \Rightarrow y = \pm 2$; de (3), x et y ont le même signe.

$\delta = \pm(7+2i)$.

- Les solutions du trinôme du second degré sont

$$\frac{3-6i \pm (7+2i)}{2} = \begin{cases} 5-2i \\ -2-4i \end{cases}$$

$$S = \{3i; 5-2i; -2-4i\}$$

2) a)

$$z_1 = 3\cdot\frac{\sqrt{3}-7i}{2\sqrt{3}-i}\cdot\frac{2\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}+i}$$

$$= 3\cdot\frac{6+i\sqrt{3}-14i\sqrt{3}+7}{12+1}$$

$$= 3\cdot\frac{13-13i\sqrt{3}}{13} = 6cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{et } Z = \left(\frac{6^4}{\sqrt{2}}\right)cis\left(-\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = 648\sqrt{2}cis\frac{-19\pi}{12} = 648\sqrt{2}cis\frac{5\pi}{12}$$

b) $z_1^4 = 1296cis\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1296\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 648\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ et

$$Z = \frac{648\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{1+i} = 324\left(-1+\sqrt{3}\right) + 324\left(\sqrt{3}+1\right)i$$

c) $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$$

3)

$$z = -\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}(1+i)}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$= 1cis\frac{-3\pi}{4}$$

Les racines cubiques de z sont donc de la forme

$$z_k = 1cis\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right) \text{ avec } k \in \{0;1;2\}.$$

Elles sont $z_0 = 1cis\frac{-\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$$z_1 = 1cis\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = 1cis\frac{5\pi}{12}\left(= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right)$$

$$z_2 = 1cis\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) = 1cis\frac{13\pi}{12} = 1cis\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$$

<u>Question II (30 (19+11) points)</u>

1) $$(s) \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)\cdot 3} \begin{cases} ay + z = 2 \\ 2ax + 3y = -6 \\ 2ax - y - az = a \end{cases}$$

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & a & 1 & 0 & a \\ 2a & 3 & 0 & 2a & 3 \\ 2a & -1 & -a & 2a & -1 \end{array}\right|$$
$$= -2a - 6a + 2a^3$$
$$= 2a^3 - 8a = 2a(a-2)(a+2)$$

$$\det A_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & a & 1 & 2 & a \\ -6 & 3 & 0 & -6 & 3 \\ a & -1 & -a & a & -1 \end{array}\right|$$
$$= -6a + 6 - 3a - 6a^2$$
$$= -6a^2 - 9a + 6$$
$$= -3(a+2)(2a-1)$$

$$\det A_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2a & -6 & 0 & 2a & -6 \\ 2a & a & -a & 2a & a \end{array}\right|$$
$$= 2a^2 + 12a + 4a^2$$
$$= 6a^2 + 12a = 6a(a+2)$$

$$\det A_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & a & 2 & 0 & a \\ 2a & 3 & -6 & 2a & 3 \\ 2a & -1 & a & 2a & -1 \end{array}\right|$$
$$= -12a^2 - 4a - 12a - 2a^3$$
$$= -2a^3 - 12a^2 - 16a$$
$$= -2a(a+2)(a+4)$$

Discussion :

- Si $a \in IR - \{-2;0;2\}$, $\det A \neq 0$. Le système admet une solution unique ; $S = \left\{\left(\frac{3-6a}{2a^2-4a};\frac{3}{a-2};\frac{a+4}{2-a}\right)\right\}$. Les équations du système sont celles de trois plans ayant un unique point en commun.
- Si $a = 0, \det A = 0$ et $\det A_x = 6 \neq 0$. Le système n'admet pas de solution ; $S = \varnothing$. Les équations du système sont celles de trois plans n'ayant pas de points en commun.
- Si $a = 2, \det A = 0$ et $\det A_x = -36 \neq 0$. Le système n'admet pas de solution ; $S = \varnothing$. Les équations du système sont celles de trois plans n'ayant pas de points en commun.
- Si $a = -2, \det A = \det A_x = \det A_y = \det A_z = 0$.

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} -2y + z = 2 \\ -4x + 3y = -6 \\ -4x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{(3)/(3)-(2)} \begin{cases} -2y + z = 2 \\ -4x + 3y = -6 \\ -4y + 2z = 4 \end{cases}$$

Les première et dernière équations étant équivalentes, le système (s) se réduit à $\begin{cases} -2y + z = 2 \\ -4x + 3y = -6 \end{cases}$

Posons $y = \alpha$. Alors $z = 2 + 2\alpha$ et $x = \frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{2}$.

$S = \left\{\left(\frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{2};\alpha;2\alpha + 2\right) / \alpha \in IR\right\}$. Les équations du système sont celles de trois plans se coupant suivant une droite passant par le point $A\left(\frac{3}{2};0;2\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{3}{4};1;2\right)$.

2) a) Le point A n'appartient pas à la droite d car au moins une des deux équations n'est pas vérifiée

$$(35 - 4 + 3 = 34 \neq 6 \wedge 7 - 4 - 3 = 0 \neq 8).$$

b)

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 6 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases} \underset{(2)/(1)-(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x + 2y - z = 6 \\ 4x - 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = 6 \\ 2x - z = -1 \Leftrightarrow z = 2x + 1 \end{cases}$$

En posant $x = \alpha$, on obtient un système d'équations paramétriques

de d : $d \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\dfrac{3}{2}\alpha + \dfrac{7}{2} \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \quad (\alpha \in IR)$

Un vecteur directeur de la droite d est $\vec{u}\left(1;-\dfrac{3}{2};2\right)$.

c) $\vec{u}$ est un vecteur normal à π.

$$X(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7) - \frac{3}{2}(y+2) + 2(z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{3}{2}y + 2z - 4 = 0$$

$\pi \equiv 2x - 3y + 4z - 8 = 0$.

d)

$$X(x;y;z) \in d \cap \pi \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = 6 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x - 3y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{(2)/(2)+(1) \\ (3)/(3)+4(1)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x + 2y - z = 6 \\ 6x + 4y = 14 \Leftrightarrow 3x + 2y = 7 \\ 22x + 5y = 32 \end{cases}$$

$$\underset{(3)/2(3)-5(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x + 2y - z = 6 \\ 3x + 2y = 7 \\ 29x = 29 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Le point de percée de d dans π est $I(1;2;3)$.