Losay

Examen de fin d'études secondaires 2006

Section C Mathématiques I

I 1) $\underline{z_1} = \dfrac{\sqrt{3}\,(1-5i) - 5\cdot(5+i)}{(2-i)^3 + i} = \dfrac{\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\,i - 25 - 5i}{8 - 12i + 6i^2 - i^3 + i} = \dfrac{\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\,i - 25 - 5i}{2 - 10i}$

$= \dfrac{(\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\,i - 25 - 5i)(1+5i)}{2(1-5i)(1+5i)} = \dfrac{26\sqrt{3} - 130 i}{2\cdot 26} = \underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5}{2} i}$

2) posons $z_4 = z_1 + z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{5}{2} i - 2\sqrt{3} + 4i = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} i$

- $\underline{Z} = \dfrac{z_4}{z_3} = \dfrac{-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i}{2+2i} = \dfrac{-3(\sqrt{3}-i)(1-i)}{4(1+i)(1-i)} = \underline{\dfrac{3(1-\sqrt{3})}{8} + \dfrac{3(1+\sqrt{3})}{8}\, i}$

- $z_4 = 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i\right) = 3 \operatorname{cis} \dfrac{5\pi}{6}$

$z_3 = 2+2i \qquad |z_3| = 2\sqrt{2} \quad , \quad z_3 = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \pi/4$

d'où $\underline{Z} = \dfrac{3 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}}{2\sqrt{2} \operatorname{cis} \pi/4} = \underline{\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \operatorname{cis} \dfrac{7\pi}{12}}$

on en déduit que:

$\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \cos \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{3(1-\sqrt{3})}{8}$ ou encore $\boxed{\cos \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}$

$\dfrac{3\sqrt{2}}{4} \sin \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{3(1+\sqrt{3})}{8}$ $\boxed{\sin \dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$

3) $z_3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \pi/4$

soit $u = s \operatorname{cis} \varphi$

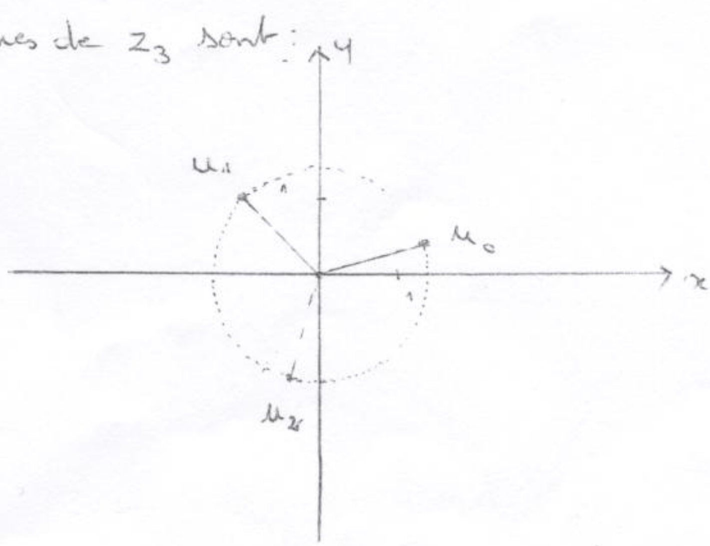
$u^3 = z_3 \iff \begin{cases} s^3 = 2\sqrt{2} \\ 3\varphi = \pi/4 + k\cdot 2\pi \;,\; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} s = \sqrt{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \;,\; k \in \{0;1;2\} \end{cases}$

les racines cubiques de z_3 sont:

$u_0 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{12}$

$u_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{9\pi}{12}$

$u_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \dfrac{17\pi}{12}$



II $\begin{cases} mx + 6y + 3z = 3 \\ x + (m-1)y = m+1 \\ x + 2my + z = m \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & 6 & 3 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 2m & 1 \end{vmatrix} = m(m-1) + 2m \cdot 3 + 0 - 3(m-1) - 6 - 0$$
$$= m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3)$$

$\Delta = 0 \iff m = 1$ ou $m = -3$

• <u>si $m \in \mathbb{R} - \{1; -3\}$</u>, le système est de Cramer et admet une solution unique

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ m+1 & m-1 & 0 \\ m & 2m & 1 \end{vmatrix} = 3m^2 + 6m - 9 = 3(m-1)(m+3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} m & 3 & 3 \\ 1 & m+1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m^2 + m - 6 = (m+3)(m-2)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} m & 6 & 3 \\ 1 & m-1 & m+1 \\ 1 & 2m & m \end{vmatrix} = -m^3 - 3m^2 + 3m + 9 = (m+3)(-m^2+3)$$

d'où $x = 3$, $y = \dfrac{m-2}{m-1}$, $z = \dfrac{-m^2+3}{m-1}$

$$S_m = \left\{ \left(3 ; \frac{m-2}{m-1} ; \frac{-m^2+3}{m-1}\right) \right\}$$

i.g. : 3 plans sécants en 1 point .

• <u>si $m = -3$</u>, le système devient :

$\begin{cases} -3x + 6y + 3z = 3 \\ x - 4y = -2 \\ x - 6y + z = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y + z = 1 & (1) \\ x = 4y - 2 & (2) \\ x - 6y + z = -3 & (3) \end{cases}$ ((2) dans (1) et (3))

$\iff \begin{cases} -2y + z = -1 \\ x = 4y - 2 \\ -2y + z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4y - 2 \\ z = 2y - 1 \end{cases}$ le système est simplement indéterminé

$$S = \{ (4y-2 ; y ; 2y-1) \,/\, y \in \mathbb{R} \}$$

i.g. : 3 plans sécants selon la droite de repère $(A, \vec{u})$

avec $A(-2 ; 0 ; -1)$ et $\vec{u}(4 ; 1 ; 2)$

• si $m = 1$, le système devient :

$$\begin{cases} x + 6y + 3z = 3 \\ x = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 6y + 3z = 1 & (1) \\ x = 2 & (2) \\ 2y + z = -1 & (3) \end{cases}$$

(1) et (3) incompatibles

$S = \phi$

i.g. : 3 plans n'ayant aucun point commun

---

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\det A = 18 + 40 - 2 + 2 + 60 + 12 = 130 \neq 0$

donc A est inversible

${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \text{adj } A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 0 \\ -29 & 20 & 13 \\ 21 & -10 & 13 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & 0 \\ \frac{-29}{130} & \frac{2}{13} & \frac{1}{10} \\ \frac{21}{130} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

le système à résoudre s'écrit $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d'où : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{13} \\ -\frac{81}{130} \\ \frac{99}{130} \end{pmatrix}$

$S = \left\{ \left(-\frac{1}{13} ; -\frac{81}{130} ; \frac{99}{130} \right) \right\}$

III

1) $$\left(2x^3+\frac{5}{x}\right)^{10}=\sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\,(2x^3)^{10-i}\left(\frac{5}{x}\right)^{i}$$
$$=\sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\, 2^{10-i}\cdot 5^{i}\, x^{30-4i}$$

$30-4i=6 \Leftrightarrow i=6$

le terme en x^6 est :

$$C_{10}^{6}\, 2^4\cdot 5^6\cdot x^6=\frac{10!}{6!\,4!}\,25\cdot 10^4\cdot x^6 = 52\,500\,000\, x^6$$

2) a) le 1er chiffre : 9 possibilités

les 5 autres : arrangements avec répétition des 10 chiffres pris 5 à 5 : $B_{10}^{5}=10^5$

en tout $9\cdot 10^5 = 900\,000$ possibilités

b) 1er chiffre : 9 possibilités

les 5 autres : arrangement sans rép. des 9 chiffres qui restent pris 5 à 5 : A_9^5

en tout : $9\cdot A_9^5 = 136\,080$ possibilités

3) nombre de cas possibles $C_{12}^{3}=220=\#\Omega$

A : 1 rouge + 1 bleue + 1 verte : $\#A=C_2^1\cdot C_4^1\cdot C_6^1=48$

$p(A)=\frac{12}{55}$

B : 3 bleues ou 3 vertes : $\#B = C_4^3+C_6^3=24$

$p(B)=\frac{6}{55}$

$C=\overline{B}$ $\quad p(C)=1-\frac{6}{55}=\frac{49}{55}$

$\overline{D}$: "aucune rouge" $\quad \#\overline{D}=C_{10}^{3}=120$

$p(\overline{D})=\frac{6}{11}$

$p(D)=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$