**Examen de fin d'études secondaires 2008 Section D Mathématiques I**

# Corrigé

**Question I** **( 4 + 11 = 15 points)**

***1. Calculer les racines carrées du nombre complexe -7 – 24i.***

Soit x+yi une racine carrée de -7-24i. On obtient :

$$(x+yi)^2 = -7-24i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = -24 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 & (1) \\ xy < 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 25 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3): $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ (3)-(1): $2y^2 = 32 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$

A cause de (2), x et y ont des signes contraires. Par conséquent, les racines carrées de -7-24i sont

$$\delta_1 = 3 - 4i \text{ et } \delta_2 = -3 + 4i$$

***2. Soit le polynôme $P(z) = z^3 - (7-5i)z^2 + (7-22i)z + 3 + 39i$***

***Sachant que P(z) admet une racine imaginaire pure, déterminer toutes les racines de P(z), et donner la factorisation de P(z).***

Soit $z_o$ = ai la racine imaginaire pure.

$$P(z_o) = 0 \quad \Leftrightarrow (ai)^3 - (7-5i)(ai)^2 + (7-22i)(ai) + 3 + 39i = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^3 i - (7-5i)(-a^2) + 7ai + 22a + 3 + 39i = 0$$

$$\Leftrightarrow (7a^2 + 22a + 3) + (-a^3 - 5a^2 + 7a + 39)\, i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7a^2 + 22a + 3 = 0 & (1) \\ -a^3 - 5a^2 + 7a + 39 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ a = -3 ou a = -1/7

a = -3 vérifie (2) (27 – 45 – 27 + 39 = 0 !). Donc: $z_o$ = -3i.

P(z) est alors divisible par $z - z_o = z + 3i$.

Schéma de Horner :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -7+5i | 7-22i | 3+39i |
| -3i | | -3i | 6+21i | -3-39i |
| | 1 | -7+2i | 13-i | R = 0 ! |

Donc : $P(z) = (z+3i)\cdot Q(z)$ avec $Q(z) = z^2 + (-7+2i)z + (13-i)$

Calcul des racines de Q(z): $\Delta = b^2 - 4ac = (-7+2i)^2 - 4\cdot 1\cdot(13-i) = 49 - 28i - 4 - 52 + 4i = -7 - 24i$.

D'après (1), les racines carrées de $\Delta$ sont $\delta_1 = 3 - 4i$ et $\delta_2 = -3 + 4i$.

Finalement, les racines de Q(z) sont

$$z_1 = \frac{7-2i+3-4i}{2} = \frac{10-6i}{2} = 5 - 3i \text{ et } z_2 = \frac{7-2i-3+4i}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i.$$

**Racines de P(z) : {-3i, 5 – 3i, 2 + i }** **Factorisation: P(z) = (z+3i)(z-5+3i)(z-2-i)**

**Question II** **(5 + 2 + 6 + 2 = 15 points)**

***On donne les nombres complexes***

$$z_1 = \frac{(3-i)^2}{7+i}\ ,\ z_2 = \frac{-\sqrt{3}+3i}{2} \quad et\ \ z_3 = 2\cdot cis\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

***1. Ecrire $z_1$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.***

$$z_1 = \frac{(3-i)^2}{7+i} = \frac{(3-i)^2(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{(8-6i)(7-i)}{50} = \frac{50-50i}{50} = 1-i$$

$z_1 = 1 - i = r_1 cis(\varphi_1)$ avec $r_1 = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

et $\begin{cases} \cos(\varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où : $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ $(+k\cdot 2\pi)$

donc : **$z_1 = 1 - i$ (forme algébrique) $= \sqrt{2}\ cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (forme trigonométrique)**

***2. Montrer que $z_1$ est une racine quatrième de -4.***

Il suffit de montrer que $(z_1)^4 = -4$.

$(z_1)^4 = \left(\sqrt{2}\ cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = (\sqrt{2})^4\ cis\left(4\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\cdot cis(-\pi) = 4\cdot(-1) = -4$

***3. Ecrire $z_2$ sous trigonométrique et calculer ses racines cubiques complexes.***

$z_2 = \frac{-\sqrt{3}+3i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = r_2 . cis(\varphi_2)$ avec

$r_1 = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{3}$ et $\begin{cases} \cos(\varphi_2) = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \\ \sin(\varphi_2) = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ d'où : $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$ $(+k\cdot 2\pi)$

donc : $z_2 = \sqrt{3}\cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Les racines cubiques de $z_2$ sont les complexes $z = r\cdot cis(\varphi)$ tels que $z^3 = z_2$.

$$z^3 = z_2 \Leftrightarrow r^3\cdot cis(3\varphi) = \sqrt{3}\cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = \sqrt{3} \\ 3\varphi = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{3} \\ \varphi = \frac{2\pi}{9} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

avec $k \in \{0,1,2\}$.

Les racines cubiques de $z_2$ sont donc: $\sqrt[6]{3}\cdot cis\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ , $\sqrt[6]{3}\cdot cis\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ , $\sqrt[6]{3}\cdot cis\left(\frac{14\pi}{9}\right)$ .

***4. Montrer que $Z = z_2\cdot(z_3)^3$ est un nombre réel.***

$\arg(Z) = \arg(z_2) + 3\cdot\arg(z_3) = \frac{2\pi}{3} + 3\cdot\frac{\pi}{9} = \pi$ donc Z est un réel (car $cis(\pi) = -1$).

**Question III** **( 18points)**

Le système (S) est équivalent à l'équation matricielle $A \cdot X = B$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & m & -1 & 1 & m \\ m & 1 & m & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right| = 2 + m^2 + m + 1 + m - 2m^2 = -m^2 + 2m + 3 = (m+1)(-m+3)$$

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow (m+1)(-m+3) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ ou $m = 3$. **(4 pts)**

---

$\boxed{\textbf{1}^{\textbf{er}} \textbf{ cas : } m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}}$

$\det(A) \neq 0$ . Le système est de Cramer et admet une solution unique.

$$\det(A_x) = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & m & -1 & -1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right| = -2 + m^2 + 1 + 1 - m - 2m = m^2 - 3m = m(m-3)$$

$$\det(A_y) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ m & 1 & m & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right| = 2 - m - m + 1 - m + 2m = 3 - m$$

$$\det(A_z) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & m & -1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right| = 1 + m + m + 1 + 1 - m^2 = -m^2 + 2m + 3 = (m+1)(-m+3)$$

**Solution unique :** $(x,y,z) = \left(\frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \frac{\det(A_y)}{\det(A)}, \frac{\det(A_z)}{\det(A)}\right)$

$$= \left(\frac{m(m-3)}{(m+1)(-m+3)}, \frac{3-m}{(m+1)(-m+3)}, \frac{(m+1)(-m+3)}{(m+1)(-m+3)}\right) = \left(-\frac{m}{m+1}, \frac{1}{m+1}, 1\right)$$

Int. géom. : les équations du système sont celles de 3 plans de l'espace qui se coupent en un point. **(6 pts)**

---

$\boxed{\textbf{2}^{\textbf{e}} \textbf{ cas : } m = -1}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = -1 \\ -x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \underset{\substack{E_2/E_2+E_1 \\ E_3/E_3-E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y - z = -1 \\ -2z = 0 \\ 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = -1 \\ \left.\begin{array}{l} z = 0 \\ z = 2/3 \end{array}\right\} \text{impossible} \end{cases} \quad \text{donc : } \boxed{S = \varnothing}$$

Int. géom. : les équations du système sont celles de 3 plans de l'espace qui n'ont aucun point commun Elles sont sécantes deux à deux. **(3 pts)**

---

$\boxed{\textbf{3}^{\textbf{e}} \textbf{ cas : } m = 3}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \underset{\substack{E_2/E_2-3E_1 \\ E_3/E_3-E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ \left.\begin{array}{l} -8y + 6z = 4 \\ -4y + 3z = 2 \end{array}\right\} \text{équivalentes} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ -4x + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}x\right) \\ z = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}x \\ z = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(x, -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}x, \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x\right) / x \in \mathbb{R}\right\}$$

Le système est simplement indéterminé.

Int. géom. : Les équations du système sont celles de 3 plans de l'espace qui se coupent suivant une droite d passant par le point $A\left(0, -\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(1, \frac{1}{9}, \frac{4}{3}\right)$. **(5 pts)**

**Question IV** (3 + 3 + 3 + 3 = 12 points)

***Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne le plan***

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha - 2\beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases}$$

***1. Etablir une équation cartésienne du plan $\pi_1$.***

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha - 2\beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \alpha - 2(y - \alpha) \\ \beta = y - \alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \alpha - 2y \\ \beta = y - \alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x + 2y - 1 \\ \beta = y - \alpha \\ z = -3 + 2(x + 2y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x + 2y - 1 \\ \beta = y - \alpha \\ \boxed{2x + 4y - z = 5} \end{cases}$$

Equation cartésienne de $\pi_1$ : $\boxed{\mathbf{2x + 4y - z = 5}}$

***2. Etablir des équations paramétriques de la droite d qui passe par le point A(3 ;0 ;-2) et qui est orthogonal au plan $\pi_1$.***

Le vecteur $\vec{u}(2; 4; -1)$ est un vecteur normal du plan $\pi_1$ et donc aussi un vecteur directeur de la droite d. D'où :

$$\boldsymbol{d} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{x = 3 + 2k} \\ \boldsymbol{y = 4k} \\ \boldsymbol{z = -2 - k} \end{cases} \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$$

***3. Donner une équation cartésienne du plan $\pi_2$ qui comprend le point B(1 ;-1 ;2) et qui est orthogonal à la droite d.***

Le plan $\pi_2$ est parallèle au plan $\pi_1$ ; l'équation est donc de la forme $2x + 4y - z = m$

$B(1 ;-1 ;2) \in \pi_2 \Leftrightarrow 2 - 4 - 2 = m \Leftrightarrow m = -4$

Donc : $\boxed{\pi_2 \equiv \mathbf{2x + 4y - z = -4}}$

***4. Le vecteur $\vec{v}$(-3 ; 6 ;1) est-il un vecteur directeur de $\pi_1$ ? Justifier.***

Le vecteur $\vec{v}(3 ;-2 ;-2)$ est un vecteur directeur de $\pi_1$ ssi il est orthogonal au vecteur normal $\vec{u}(2; 4; -1)$.

Or : $\vec{v} \cdot \vec{u} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 6 - 8 + 2 = 0$

Donc : $\vec{v} \perp \vec{u}$ et **$\vec{v}(3 ;-2 ;-2)$ est un vecteur directeur de $\pi_1$.**

Autre méthode :
Deux vecteurs directeurs de $\pi_1$ sont $\vec{v}_1(-1,1,2)$ *et* $\vec{v}_2(-2,1,0)$ .
On vérifie que $\vec{v}(3 ;-2 ;-2)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ *et* $\vec{v}_2$.