CORRIGÉ , D, juin 2010

I. a) Déterminant principal :

$$D=\begin{vmatrix} k-1 & 3 & -1 \\ 6 & k & 2 \\ k+3 & 5 & -9 \end{vmatrix}=\left(-9k^2+9k\right)+(6k+18)+(-30)-\left(-k^2-3k\right)-(10k-10)-(-162)$$

Équation : $D=0 \Leftrightarrow -8\left(k^2-k-20\right)=0 \Leftrightarrow k=-4 \text{ ou } k=5$

Le système admet une solution unique si et seulement si la valeur du paramètre k est différente de -4 et différente de 5, c'est-à-dire si et seulement si $k \in \mathbb{R}\setminus\{-4;5\}$. 5p.

b) Avec $k=5$, le système devient : $(S_5)\equiv\begin{cases}4x+3y-z=39\\6x+5y+2z=42\\8x+5y-9z=111\end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\left|\begin{array}{l}12x+9y-3z=117\\-12x-10y-4z=-84\end{array}\right| +\\ \hline -y-7z=33\end{array}}$$

Il y a compatibilité parfaite entre les trois équations et on pose donc $z=\alpha\in\mathbb{R}$.

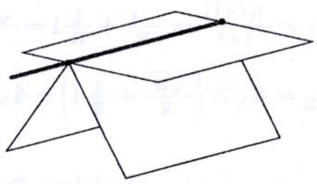
$$\boxed{\begin{array}{c}\left|\begin{array}{l}-8x-6y+2z=-78\\8x+5y-9z=111\end{array}\right| +\\ \hline -y-7z=33\end{array}}$$

On obtient : $y=-33-7\alpha$ et $x=\frac{69}{2}+\frac{11}{2}\alpha$

$EdS=\left\{\left(\frac{69}{2}+\frac{11}{2}\alpha\,;-33-\alpha\,;\alpha\right):\alpha\in\mathbb{R}\right\}$ 5p.

Interprétation géométrique :

Les trois équations du système représentent trois plans de l'espace, deux à deux non parallèles. Deux des plans se coupent selon une droite entièrement contenue dans le troisième. Les trois plans concourent en la droite par $A\left(\frac{69}{2};-33;0\right)$, de vecteur $\vec{v}\left[\frac{11}{2};-1;1\right]$.



5p.

II. a) $\frac{x-5}{4}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-3}{5}$ donc : $QR\equiv\begin{cases}3x+4y=-1\\5x-4z=13\end{cases}$ ou $QR\equiv\begin{cases}3x+4y=-1\\5y+3z=-11\end{cases}$ 3p.

b) Le plan Π : $4x-3y+5z=d$ et $4\cdot6-3\cdot4+5\cdot2=d$, donc : $\Pi\equiv\ 4x-3y+5z=22$ 3p.

c) Faire vérifier l'équation du plan « avec » second membre. Exemple : $H(0;1;5)$ 3p.

d) Faire vérifier l'équation du plan « sans » second membre. Exemple : $\vec{u}[3;4;0]$. 3p.

e) Substituer : $4(5+4k)-3(-4-3k)+5(3+5k)=22$ donc $k=\frac{-1}{2}$. 3p.

Le point d'intersection de la droite et du plan est : $K\left(3;\frac{-5}{2};\frac{1}{2}\right)$

III. a) Discriminant de l'équation du second degré : $\Delta=4(-3-4i)-4\cdot(-3-6i)=8i$

Les deux racines carrées complexes opposées de Δ : $\delta_1=2+2i$; $\delta_2=-\delta_1$

Solutions : $x_{1|2}=\frac{-2(1-2i)\pm(2+2i)}{2}$. D'où : $EdS=\{\,3i\,;-2+i\,\}$ 7p.

b) Zéro au second membre, ordonner selon les puissances décroissantes de l'inconnue :

$z^3+(2-6i)z^2+(-11-10i)z+(-12+6i)=0$

Noter $z_0:=b\cdot i\ \ (b\in\mathbb{R})$ une solution imaginaire pure.

$$-b^3i-(2-6i)b^2+(-11-10i)bi+(-12+6i)=0\Leftrightarrow\begin{cases}-b^3+6b^2-11b+6=0 & (1)\\-2b^2+10b-12=0 & (2)\end{cases}$$

De (2) : $b=2$ ou $b=3$.

La substitution dans (1) montre que les deux valeurs sont acceptables.

L'équation donnée admet donc deux racines imaginaires pures : $z_0=2i$ et $z_1=3i$ 4p.

Avec le schéma de Horner, on obtient : $EdS=\{\,2i\,;3i\,;-2+i\}$ 4p.

IV. a) Poser $z := r \cdot \text{cis}\varphi$ où $r > 0$ et φ est un angle.

Équation :

$$z^3 = Z \Leftrightarrow r^3 \cdot \text{cis}3\varphi = 8\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

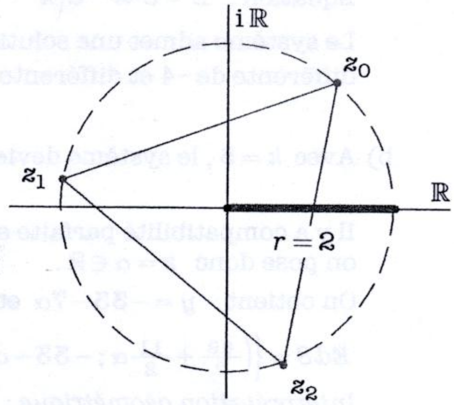
$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\varphi = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \sqrt[3]{} \\ :3 \ \text{(3 solutions)} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \ (k = 0,1,2) \end{cases}$$

Le nombre Z admet trois racines cubiques complexes :

$$z_0 = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{5\pi}{18} = 2 \cdot \text{cis}\,50°$$

$$z_1 = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{17\pi}{18} = 2 \cdot \text{cis}\,170° \qquad \text{3p.}$$

$$z_2 = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{29\pi}{18} = 2 \cdot \text{cis}\,290°$$



Dans le plan complexe, les points images sont les trois sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon $r = 2$ centré au point d'affixe 0. 3p.

b) $z_1 = \frac{i(1+i)}{1+1} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cis}\,\frac{3\pi}{4}$

$z_2 = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\sqrt{3}\ \text{cis}\,\frac{\pi}{6}$ 2p.

$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot \left(6 + 2\sqrt{3}\ i\right) = \left(-3 - \sqrt{3}\right) + \left(3 - \sqrt{3}\right)i$

$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{3}\ \text{cis}\,\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{cis}\,\frac{3\pi}{4} = 2\sqrt{6}\ \text{cis}\,\frac{11\pi}{12}$ 3p.

Par comparaison :

$2\sqrt{6}\ \text{cis}\,\frac{11\pi}{12} = \left(-3 - \sqrt{3}\right) + \left(3 - \sqrt{3}\right)i \qquad |\cdot\sqrt{6}$

$12\,\text{cis}\,\frac{11\pi}{12} = \left(-3\sqrt{6} - \sqrt{18}\right) + \left(3\sqrt{6} - \sqrt{18}\right)i \qquad |:12$

$\text{cis}\,\frac{11\pi}{12} = \frac{-3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} + \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12}i$

Conséquence :

$\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 4p.

$\tan\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{-\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} - 2$