Question I

1) $$\begin{cases} z_1 = (1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)^5 = (\sqrt{2})^5\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4} = \underline{\underline{4\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}}} \\ z_1 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + 4\sqrt{2}\,i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \end{cases}$$

$$= \underline{\underline{-4-4i}}$$

$$\begin{cases} z_2 = (\sqrt{3}+3i)^4 = \left(2\sqrt{3}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{3}\right)^4 = (2\sqrt{3})^4\,\text{cis}\,4\cdot\frac{\pi}{3} = \underline{\underline{144\,\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}}} \\ z_2 = 144\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 144\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{\underline{-72-72\sqrt{3}\,i}} \end{cases}$$

2) $$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-\cancelto{1}{4}(1+i)}{-\cancelto{18}{72}(1+\sqrt{3}i)} = \frac{1}{18}\cdot\frac{(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{1-\sqrt{3}i+i-\sqrt{3}i^2}{18\cdot 4} \qquad i^2=-1$$

$$= \underline{\underline{\frac{1+\sqrt{3}}{72} + \frac{1-\sqrt{3}}{72}i}} \quad (\text{f. alg})$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{4\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{5\pi}{4}}{144\,\text{cis}\,\frac{4\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{36}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{36}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right)}} \quad (\text{f. trig})$$

3) Par identification :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{36}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{72} & \Big|\cdot 18\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{36}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{72} & \Big|\cdot(-18\sqrt{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{18(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{72} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{18\sqrt{6}-18\sqrt{2}}{72} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}} \end{cases}$$

$$\text{et } \tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = \underline{\underline{2-\sqrt{3}}}$$

Question II

$$\boxed{P(z) = z^3 - 5z^2 + 13z - 5 + 12i}$$

1) $$z_0 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = \left[\frac{(1+i)^2}{2}\right]^3 = \left(\frac{2i}{2}\right)^3 = i^3 = \underline{-i}$$

$$\begin{aligned} P(z_0) = P(-i) &= (-i)^3 - 5\cdot(-i)^2 + 13\cdot(-i) - 5 + 12i \\ &= -(-i) - 5\cdot(-1) - 13i - 5 + 12i \\ &= \underline{i} + \cancel{5} - \underline{13i} - \cancel{5} + \underline{12i} \\ &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$z_0 = -i$ est une racine du polynôme $P(z)$.

2) $P(z)$ est divisible par $z_1-\underbrace{(-i)}_{z_0}=z+i$: $P(z)=(z+i)\cdot Q(z)$

H	1	-5	13	-5+12i
-i	↓	-i	5i-1	-12i+5
	1	-5-i	12+5i	0

où

$Q(z)=z^2+(-5-i)z+12+5i$

Calcul de Δ : $\Delta=(-5-i)^2-4(12+5i)=24+10i-48-20i=-24-10i$

Racines carrées de Δ :

Rés. l'éq. $z_1^2=\Delta$ où $z_1=x+iy$ revient à rés. le système :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-24 & (1)\\ 2xy=-10 & (2)\\ x^2+y^2=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}=26 & (3)\end{cases}$$

$\underline{(1)+(3)}$: $2x^2=2$, $x^2=1$, $x=\pm 1$

$\underline{(3)-(1)}$: $2y^2=50$, $y^2=25$, $y=\pm 5$

Comme $xy<0$ on a les 2 r.c. de Δ :
$-1+5i$
$1-5i$

Soit donc $\underline{1-5i}$ une r.c. de Δ

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{5+i+1-5i}{2\cdot 1}=\dfrac{6-4i}{2}=\dfrac{2(3-2i)}{2}=\underline{3-2i}\\ z_2=\dfrac{5+i-1+5i}{2}=\dfrac{4+6i}{2}=\underline{2+3i}\end{cases}$$

D'où $S_{\mathbb{C}}=\{-i,3-2i,2+3i\}$

Question III

$$(s)\cdot\begin{cases} 2x-2y+mz=m\\ 2x+my-2z=m\\ mx-2y+2z=0\end{cases} \qquad m\in\mathbb{R} \qquad \text{Matrice } A=\begin{pmatrix}2&-2&m\\2&m&-2\\m&-2&2\end{pmatrix}$$

1) (s) admet une sol. unique $\Leftrightarrow$ dét $A\neq 0$

$$\text{dét } A=\begin{vmatrix}2&-2&m\\2&m&-2\\m&-2&2\end{vmatrix}=2\cdot(2m-4)+2\cdot(4+2m)+m\cdot(-4-m^2)$$
$$=4m-\cancel{8}+\cancel{8}+\cancel{4m}-\cancel{4m}-m^3$$
$$=4m-m^3$$
$$=m(4-m^2)$$
$$=m(2-m)(2+m)$$

dét $A=0\Leftrightarrow m=0$ ou $m=2$ ou $m=-2$

(s) admet une solution unique $\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$

2) a) $m = \boxed{0}$: $\begin{cases} 2x - 2y = 0 & (1) \\ 2x - 2z = 0 & (2) \\ -2y + 2z = 0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ -y + z = 0 & (1)-(2) \\ -y + z = 0 & (3) \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$ Pour : $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $y = z = \lambda$ et $x = y = \lambda$

$$S = \{(\lambda, \lambda, \lambda) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

IG : Les trois plans distincts sont sécants deux à deux suivant la même droite $d \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

b) $m = \boxed{1}$: $\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 & (1) \\ 2x + y - 2z = 1 & (2) \\ x - 2y + 2z = 0 & (3) \end{cases}$ Le système admet une sol. unique!

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = 1 & (1) \\ 6x - 3y = 3 & 2\cdot(1) + (2) \\ 3x - 2y = 2 & 2\cdot(1) - (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = 1 & (1) \\ 2x - y = 1 & (2) : 3 \\ 3x - 2y = 2 & (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 2x - y = 1 \\ x = 0 & 2\cdot(2) - (3) \end{cases}$ D'où la solution :

- $x = 0$
- $y = 2\cdot 0 - 1 = -1$
- $z = 1 - 0 - 2 = -1$

$$S' = \{(0 ; -1 ; -1)\}$$

IG : Les trois plans ont un seul point commun à savoir : $I(0, -1, -1)$.

c) $m = \boxed{2}$ $\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 & (\pi_1) \\ x + y - z = 1 & (\pi_2) \\ x - y + z = 0 & (\pi_3) \end{cases}$

Le système est <u>impossible</u>

$$S = \emptyset$$

IG : Les deux plans parallèles distincts π_1 et π_3 sont coupés par le plan π_2 suivant des droites parallèles.

Question IV

a) Système d'éq. paramétriques de $d = AB$ où $A(1,2,3)$ et $B(3,-2,1)$

$M(x,y,z) \in d \Leftrightarrow \vec{AM} = k \cdot \vec{AB}$ où $\vec{AB}(2,-4,-2)$ ou $\vec{u}(1,-2,-1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k \\ y-2 = -2k \\ z-3 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+k \\ y = 2-2k \\ z = 3-k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

b) Position relative de π et d : $\pi \equiv 2x - y + 3z = 4$

Vect. normal : $\vec{n}_\pi(2,-1,3)$
Vect. directeur : $\vec{u}_d(1,-2,-1)$
$\vec{n}_\pi \odot \vec{u}_d = 2+2-3 = 1 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{n}_\pi$ et $\vec{u}_d$ ne sont pas orthogonaux, donc la droite d coupe le plan π en un point I.

$d \cap \pi = \{I\}$:

A résoudre le système :
$$\begin{cases} x = 1+k & (1) \\ y = 2-2k & (2) \\ z = 3-k & (3) \\ 2x-y+3z = 4 & (4) \end{cases}$$

Dans (4) : $2(1+k) - (2-2k) + 3(3-k) = 4$

$\cancel{2} + 2k \cancel{-2} + 2k + 9 - 3k = 4$

$k + 9 = 4$

$k = -5$

Coordonnées de I : $I(1-5,\ 2-2(-5),\ 3-(-5))$, soit $I(-4,12,8)$

c) $C(1,-2,0) \in \pi$ car : $2\cdot1 - (-2) + 3\cdot0 = 2+2 \overset{!}{=} 4$

$C(1,-2,0) \notin d$ car $\begin{cases} 1 = 1+k \\ -2 = 2-2k \\ 0 = 3-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ -2 = 2 \\ 3 = 0 \end{cases}$ impossible

d) Éq. cartésienne du plan passant par les 3 pts non alignés $C(1,-2,0)$, $I(-4,12,8)$ et $A(1,2,3)$:

$$M \in CIA \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -5 \\ y+2 & 4 & 14 \\ z & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \qquad \vec{CA}(0,4,3) \quad \vec{CI}(-5,14,8)$$

$\Leftrightarrow (x-1)(\underbrace{32-42}_{-10}) - 5(3y+6-4z) = 0$

$\Leftrightarrow -10x + 10 - 15y - 30 + 20z = 0$

$\Leftrightarrow -10x - 15y + 20z - 20 = 0 \quad |:-5$

$CIA \equiv 2x + 3y - 4z = -4$