Examen de fin d'études secondaires 2015 – Section C

Mathématiques I - Corrigé

Question 1 [8 + 4 + (5 + 1 + 2) = 20 points]

1) $P(z)=z^3-(6+2i)z^2+(12+15i)z-9-27i$

$$P(3i)=(3i)^3-(6+2i)(3i)^2+(12+15i)\cdot 3i-9-27i$$
$$=-27i-(6+2i)(-9)+36i-45-9-27i$$
$$=-27i+54+18i+9i-54$$
$$=0$$

Donc P(z) est divisible par (z – 3i):

	1	-6-2i	12+15i	-9-27i
3i		3i	-3-18i	9+27i
	1	-6+i	9-3i	0

Alors $P(z)=(z-3i)\left(z^2+(-6+i)z+(9-3i)\right)$

et $P(z)=0 \Leftrightarrow z-3i=0$ ou $\underbrace{z^2+(-6+i)z+(9-3i)=0}_{(E')}$

- Résolution de (E'): $\Delta=(-6+i)^2-4\cdot 1\cdot(9-3i)=36-12i-1-36+12i=-1=i^2$

(Les racines carrées complexes de $\Delta=-1$ sont i et $-i$.)

$$z_1=\frac{6-i-i}{2}=\frac{6-2i}{2}=3-i$$

$$z_2=\frac{6-i+i}{2}=\frac{6}{2}=3$$

- Solutions de (E): $S=\{3i;3-i;3\}$

---

2) $z^3=(21-20i)z$

$\Leftrightarrow z\left(z^2-(21-20i)\right)=0$

$\Leftrightarrow z=0$ ou $\underbrace{z^2=21-20i}_{(E')}$

Pour résoudre (E'), il faut déterminer les racines carrées complexes de 21 – 20i :

$x+iy$ est une racine carrée complexe de 21 – 20i

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=21 & (1) \\ 2xy=-20 & (2) \\ x^2+y^2=29 & (3) \end{cases} \quad \Big| \quad x^2+y^2=\sqrt{21^2+(-20)^2}=29$$

(3) + (1) : $2x^2=50 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5$

(3) – (1) : $2y^2=8 \Leftrightarrow y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm 2$

Par (2) : $xy<0$, donc x et y sont de signe contraire.

Donc $z_1=5-2i$ est une r.c.c. de 21 – 20i et $z_2=-5+2i$ est une r.c.c. de 21 – 20i.

Donc : $S=\{0\ ;\ 5-2i\ ;\ -5+2i\}$

---

3) a) • $z_1=-2\text{cis}\frac{\pi}{4}=2\text{cis}\pi\cdot\text{cis}\frac{\pi}{4}=2\text{cis}\frac{5\pi}{4}$ Donc: $\boxed{z_1=2\text{cis}\frac{5\pi}{4}}$

• $z_2=\frac{i}{\sqrt{3}-i}$ $\qquad |z_2|=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

$$=\frac{i}{\sqrt{3}-i}\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i}$$
$$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{3+1}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi&=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2} \\ \sin\varphi&=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

Donc: $\boxed{z_2=\frac{1}{2}\text{cis}\frac{2\pi}{3}}$

b) • $Z=\frac{(z_1)^2}{(z_2)^4}=\frac{\left(2\text{cis}\frac{5\pi}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^4}=\frac{4\text{cis}\frac{5\pi}{2}}{\frac{1}{16}\text{cis}\frac{8\pi}{3}}=64\text{cis}\left(\frac{30\pi}{12}-\frac{32\pi}{12}\right)$ Donc: $\boxed{Z=64\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

• $Z=64\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=64\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=64\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ Donc : $\boxed{Z=32\sqrt{3}-32i}$

c) Racines cubiques de $Z=64\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$: $z_k=\sqrt[3]{64}\,cis\left(\frac{-\frac{\pi}{6}}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)$ $(k=0,1,2)$

Donc les racines cubiques de Z sont : $z_0=4\,cis\left(\frac{-\pi}{18}\right)$, $z_1=4\,cis\left(\frac{11\pi}{18}\right)$, $z_2=4\,cis\left(\frac{23\pi}{18}\right)$

Question 2 – Combinatoire et probabilités [5 + 8 + 7 = 20 points]

1) Calculer le terme en x^{16} dans le développement de $\left(2x^5-\frac{1}{3x^3}\right)^8$

$$\left(2x^5-\frac{1}{3x^3}\right)^8=\sum_{p=0}^{8}C_8^p\cdot(-1)^p\cdot\left(2x^5\right)^{8-p}\cdot\left(\frac{1}{3x^3}\right)^p$$

terme général: $C_8^p\cdot(-1)^p\cdot 2^{8-p}x^{5(8-p)}\cdot\frac{1}{3^p}\cdot\frac{1}{x^{3p}}$

$$=C_8^p\cdot(-1)^p\cdot 2^{8-p}\cdot 3^{-p}\cdot x^{40-5p}\cdot x^{-3p}$$

$$=C_8^p\cdot(-1)^p\cdot 2^{8-p}\cdot 3^{-p}\cdot x^{40-8p}$$

On obtient le terme en x^{16} lorsque $40-8p=16 \Leftrightarrow p=3$.

Si p = 3 : $=C_8^3\cdot(-1)^3\cdot 2^5\cdot 3^{-3}\cdot x^{16}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\frac{32}{27}\cdot x^{16}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{32}{27}\cdot x^{16}=56\cdot\frac{32}{27}\cdot x^{16}=\frac{1792}{27}\cdot x^{16}$

---

2) Un coffre-fort est verrouillé et déverrouillé par un code de 4 chiffres.

Avec les 10 chiffres (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), combien peut-on créer

a) de codes de 4 chiffres qui ne commencent pas par 0 ?

Le nombre de possibilités est $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10=9000$

b) de codes de 4 chiffres composés de 4 chiffres distincts ?

Le nombre de possibilités est $A_{10}^4=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040$.

c) de codes de 4 chiffres distincts commençant par un chiffre pair et se terminant par 0 ?

$\underbrace{\boxed{p}}_{4\,poss}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}}_{A_8^2\,poss.}\ \boxed{0}$ Le nombre de possibilités est $4\cdot A_8^2=224$

d) de codes de 4 chiffres composés exactement d'un chiffre pair (utilisé deux fois) et d'un chiffre impair (utilisé deux fois) ? (par exemple : 3311, 4114, 2121, ...)

Le nombre de possibilités est $\underbrace{5}_{\substack{choix\\chiffre\\pair}}\ \underbrace{5}_{\substack{choix\\chiffre\\impair}}\ \underbrace{C_4^2}_{\substack{choix\\positions\\chiffres\\pairs}}=5\cdot 5\cdot 6=150$

(ou bien :

une fois le chiffre pair et le chiffre impair choisi ($5\cdot 5=25$ possibilités),

il y a 6 façons d'arranger ces chiffres : PPII, PIPI, PIIP, IIPP, IPIP, IPPI

donc, au total, il y a $5\cdot 5\cdot 6=150$ possibilités.)

---

3) D'un jeu de 52 cartes, on tire au hasard et simultanément une main de 5 cartes.

L'univers est l'ensemble des mains de 5 cartes : $\#\Omega=C_{52}^5=2598960$

a) Soit A l'événement « obtenir une main comportant exactement 3 cœurs, dont la dame de cœur »

$\underbrace{\boxed{D\heartsuit}}_{1\,poss.}\ \underbrace{\boxed{\heartsuit}\ \boxed{\heartsuit}}_{C_{12}^2\,poss.}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}}_{C_{39}^2\,poss.}$

Nombre de mains possibles : $1\cdot C_{12}^2\cdot C_{39}^2=66\cdot 741=48906$

Alors $P(A)=\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{48906}{2598960}\cong 0{,}0188$

b) Soit B l'événement « obtenir une main comportant au moins un roi »

Alors l'événement contraire à B est $\overline{B}$= « obtenir aucun roi ».

Or $\#\overline{B}=C_{48}^5=1712304$ (il y a 48 cartes « non-roi » dans le jeu)

Alors $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{\#\overline{B}}{\#\Omega}=1-\frac{1712304}{2598960}\cong 0{,}341$

Question 3 [(4 + 5 + 1) + (5 + 5) = 20 points]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé,

on considère le plan $\pi_1\equiv\begin{cases}x=2\alpha-\beta+3\\y=-\beta-1\\z=-\alpha+2\end{cases}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ et le point $B(5;1;8)$.

a) Établir une équation cartésienne du plan π_1.

Méthode 1

$$\pi_1\equiv\begin{cases}x=2\alpha-\beta+3\\y=-\beta-1\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2(-z+2)-(-y-1)+3\\\beta=-y-1\\\alpha=-z+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y+2z=8\\\beta=-y-1\\\alpha=-z+2\end{cases}$$

Donc: $\boxed{\pi_1\equiv x-y+2z=8}$

Méthode 2

π_1 est le plan de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-0\end{pmatrix}$ passant par le point $A(3;-1;2)$.

$$M(x;y;z)\in\pi_1 \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 2 & -1 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 0+(y+1)-2(z-2)-0-(x-3)-0=0 \qquad \text{Donc: } \boxed{\pi_1 \equiv x-y+2z=8}$$

$$\Leftrightarrow x-y+2z=8$$

b) Soit d la droite passant par le point B et orthogonale au plan π_1.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite d et du plan π_1.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π_1, donc $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur de la droite d.

Système d'équations paramétriques de d : $M(x;y;z)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=k\cdot\vec{n} \quad (k\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=k\cdot 1 \\ y-1=k\cdot(-1) \\ z-8=k\cdot 2 \end{cases} (k\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=k+5 \\ y=-k+1 \\ z=2k+8 \end{cases} (k\in\mathbb{R})$$

Pour étudier l'intersection de la droite d et du plan π_1, on résout : $\begin{cases} x=k+5 & (1) \\ y=-k+1 & (2) \\ z=2k+8 & (3) \\ x-y+2z=8 & (4) \end{cases}$

En remplaçant (1), (2) et (3) dans (4), on obtient : $(k+5)-(-k+1)+2(2k+8)=8$

$$\Leftrightarrow 6k=-12$$

$$\Leftrightarrow k=-2$$

Dans (1), (2), (3) : $\begin{cases} x=-2+5=3 \\ y=-(-2)+1=3 \\ z=2(-2)+8=4 \end{cases}$ Donc : $\boxed{d\cap\pi_1=\{\,C(3;3;4)\,\}}$

c) Déterminer une équation cartésienne du plan π_2 parallèle au plan π_1 et passant par le point B.

$\pi_1 \equiv x-y+2z=8$ et $\pi_1 \parallel \pi_2$, donc l'équation de π_2 est de la forme $x-y+2z=d$.

$B(5;1;8)\in\pi_2 \Leftrightarrow 5-1+2\cdot 8=d \Leftrightarrow d=20$ Donc : $\boxed{\pi_2 \equiv x-y+2z=20}$

2) $\begin{cases} 5x+my-3z=-7 \\ (m+3)x-y+z=-2 \\ 5x-my+(2m-3)z=5 \end{cases}$ (*)

a) Soit $A=\begin{pmatrix} 5 & m & -3 \\ m+3 & -1 & 1 \\ 5 & -m & 2m-3 \end{pmatrix}$ la matrice du système (*).

Le système (*) admet une solution unique $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

$$\det A=\begin{vmatrix} 5 & m & -3 \\ m+3 & -1 & 1 \\ 5 & -m & 2m-3 \end{vmatrix} \begin{aligned} &=-5(2m-3)+3m(m+3)+5m-15+5m-m(m+3)(2m-3) \\ &=-10m+15+3m^2+9m+5m-15+5m-2m^3+3m^2-6m^2+9m \\ &=-2m^3+18m \\ &=-2m(m^2-9) \\ &=-2m(m-3)(m+3) \end{aligned}$$

$\det A=0 \Leftrightarrow m=0$ *ou* $m=-3$ *ou* $m=3$

Le système (*) admet une solution unique $\Leftrightarrow \det A\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-3;0;3\}$

b) Si <u>m = -3</u>, alors le système devient :

$$\begin{cases} 5x-3y-3z=-7 \\ -y+z=-2 \\ 5x+3y-9z=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y-3z=-7 \\ -y+z=-2 \\ 6y-6z=12 \quad (L_3 \mid L_3-L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y-3z=-7 \\ -y+z=-2 \\ -y+z=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y-3z=-7 \\ z=y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{5}(3y+3(y-2)-7) \\ z=y-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{6}{5}y-\frac{13}{5} \\ z=y-2 \end{cases}$$

On pose : $y=\beta$, $(\beta\in\mathbb{R})$

Alors on obtient: $\begin{cases} x=\frac{6}{5}\beta-\frac{13}{5} \\ y=\beta \\ z=\beta-2 \end{cases} \quad (\beta\in\mathbb{R})$

Donc:

$$\boxed{S=\left\{\left(\frac{6}{5}\beta-\frac{13}{5};\beta;\beta-2\right) \;/\; \beta\in\mathbb{R}\right\}}$$

<u>*Interprétation géométrique*</u> :
(*) est un système d'équations de 3 plans de l'espace se coupant suivant la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{6}{5};1;1\right)$ et passant par le point $A\left(-\frac{13}{5};0;-2\right)$.

<u>(Solutions alternatives :</u>

$$S=\left\{\left(\alpha;\frac{5}{6}\alpha+\frac{13}{6};\frac{5}{6}\alpha+\frac{1}{6}\right) \;/\; \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

$$S=\left\{\left(\frac{6}{5}\gamma-\frac{1}{5};\gamma+2;\gamma\right) \;/\; \gamma\in\mathbb{R}\right\}$$