Corrigé - Mathématiques I

2013

Section C

Question I

1) $P(z) = z^3 - z^2 - (3-8i)z + 7+4i$

Schéma de Horner

	1	-1	$-3+8i$	$7+4i$
i		i	$-1-i$	$-7-4i$
	1	$-1+i$	$-4+7i$	0

d'où $P(z) = (z-i)\cdot\underbrace{\left(z^2+(-1+i)z-4+7i\right)}_{Q(z)}$

Cherchons les racines de $Q(z)$: $\Delta = (-1+i)^2 - 4\cdot(-4+7i)$

$= 1-2i-1+16-28i$

$= 16-30i$

Déterminons les racines carrées complexes de $\Delta = 16-30i$.

Le complexe $t = a+bi$ est une r.c.c. de $\Delta = 16-30i$ ssi

$t^2 = 16-30i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 = 16 & (1)\\ 2ab = -30 & (2)\\ a^2+b^2 = \sqrt{16^2+30^2} = 34 & (3)\end{cases}$$

Par (2) : a et b ont des signes contraires

(1)+(3) : $2a^2 = 50 \Leftrightarrow a=-5$ ou $a=5$

(3)-(1) : $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b=-3$ ou $b=3$

Les r.c.c. cherchées sont $-5+3i$ et $5-3i$.

Les racines de $Q(z)$ sont donc

$$z_1 = \frac{1-i-5+3i}{2} = -2+i$$

$$z_2 = \frac{1-i+5-3i}{2} = 3-2i$$

Les racines de $P(z)$ sont z_0, z_1 et z_2

et $P(z) = (z-i)(z+2-i)(z-3+2i)$

2) $z_1 = \dfrac{2}{-5\sqrt{2}(1-i)}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}-i}$

a) * $z_1 = \dfrac{2}{-5\sqrt{2}(1-i)}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}$

$$= \frac{2+2i}{-10\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{20}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{10}i$$

$|z_1| = \sqrt{\frac{2}{100}+\frac{2}{100}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\varphi_1 = 1\\ \varphi_1 \in 3^e \text{ quadrant}\end{array}\right\}\ \varphi_1 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

d'où $z_1 = \frac{1}{5}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

* $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}-i}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{3+\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i+3}{4}$

$$= \frac{6-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$|z_2| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\varphi_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \varphi_2 \in 4^e \text{ quadrant}\end{array}\right\}\ \varphi_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

d'où $z_2 = \sqrt{3}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

b) $z_3 = \dfrac{z_1}{(z_2)^2} = \dfrac{\frac{1}{5}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{3\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

$$= \frac{1}{15}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{15}\operatorname{cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right)$$

Question II

$$\begin{cases} (m+1)x-2y+z=2 \\ x-my-z=m \\ (m-1)x+2y+z=1 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de trois équations à trois inconnues de matrice

$$A=\begin{pmatrix} m+1 & -2 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ m-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\det A = \begin{vmatrix} m+1 & -2 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ m-1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} m+1 & -2 \\ 1 & -m \\ m-1 & 2 \end{matrix}$$

$$= \cancel{-m^2} - m + 2m \cancel{-2} \cancel{+2}$$
$$\cancel{+m^2} - m + 2m + 2 + 2$$
$$= 2m+4$$

Il s'agit donc d'un système de Cramer si $m \neq -2$.

* Si $\boxed{m \neq -2}$, alors on a

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ m & -m & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -2 \\ m & -m \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= \cancel{-2m} + 2 \cancel{+2m} + m + 4 + 2m$$
$$= 3m+6$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} m+1 & 2 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} m+1 & 2 \\ 1 & m \\ m-1 & 1 \end{matrix}$$

$$= \cancel{m^2} + m - 2m \cancel{+2} + 1 \cancel{-m^2} + m$$
$$+ m + 1 \cancel{-2}$$
$$= m+2$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} m+1 & -2 & 2 \\ 1 & -m & m \\ m-1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} m+1 & -2 \\ 1 & -m \\ m-1 & 2 \end{matrix}$$

$$= -m^2 - m \cancel{-2m^2} \cancel{+2m} + 4$$
$$\cancel{+2m^2} \cancel{-2m} - 2m^2 - 2m + 2$$
$$= -3m^2 - 3m + 6$$
$$= -3(m^2+m-2) = -3(m-1)(m+2)$$

On en tire que $x = \dfrac{3m+6}{2m+4} = \dfrac{3}{2}$

$$y = \frac{m+2}{2m+4} = \frac{1}{2}$$

$$z = \frac{-3(m-1)(m+2)}{2m+4} = \frac{-3m+3}{2}$$

d'où $S = \left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-3m+3}{2}\right)\right\}$ $(m \neq -2)$

Si $\underline{m \neq -2}$, alors le système résolu est un syst. d'équations de trois plans de l'espace dont l'intersection est le point de coord. $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-3m+3}{2}\right)$.

* Si $\boxed{m=2}$, alors le système s'écrit

$$\begin{cases} -x-2y+z=2 \\ x+2y-z=-2 \\ -3x+2y+z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ -3x+2y+z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ -2x+4y=-1 \end{cases}$$ <u>Syst. simpl. indéterminé</u>

Posons $y=k$ $(k \in \mathbb{R})$

alors $-2x=-1-4k \Leftrightarrow x = 2k+\frac{1}{2}$

et $z = 2k+\frac{1}{2}+2k+2 = 4k+\frac{5}{2}$

d'où $S = \left\{\left(2k+\frac{1}{2}; k; 4k+\frac{5}{2}\right) / k \in \mathbb{R}\right\}$

On a donc $\begin{cases} x = 2k+\frac{1}{2} \\ y = k \\ z = 4k+\frac{5}{2} \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$

Si $\underline{m=-2}$, alors le système résolu est un syst. d'équations de trois plans de l'espace (dont deux sont confondus) dont l'intersection est la droite passant par $A\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{5}{2}\right)$ et dont $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

Question III

1) Les vecteurs $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ne sont pas colinéaires et A, B et C définissent donc un plan Π_2.

$M(x;y;z) \in \Pi_2$

$\Leftrightarrow \det(\vec{AM}; \vec{AB}; \vec{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & -1 \\ z & -2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x+1 & 1 \\ y-2 & 1 \\ z & -2 \end{matrix} = 0$

$\Leftrightarrow -x-1-z-4y+8-2z-2x-2+y-2=0$

$\Leftrightarrow -3x-3y-3z+3=0 \quad |:(-3)$

$\Leftrightarrow \boxed{x+y+z-1=0} \quad (\Pi_2)$

2) Comme les vecteurs normaux $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des plans Π_1 et Π_2 ne sont pas colinéaires, les plans Π_1 et Π_2 ne sont pas parallèles.

3) Le vecteur $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

$M'(x;y;z) \in d$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{AM'} = k \cdot \vec{n}_1$

$\Leftrightarrow$ —— " —— $\begin{cases} x+1 = k \\ y-2 = k \\ z = -2k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -\frac{1}{2}z \\ y-2 = -\frac{1}{2}z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z+2=0 \\ 2y+z-4=0 \end{cases}$

Question IV

1) Le nombre de mains distinctes de 8 cartes est égal à C_{32}^{8}.

a) Le nombre de mains à exactement trois carreaux et deux trèfles est égal à $C_8^3 \cdot C_8^2 \cdot C_{16}^3$.

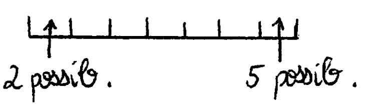
La probabilité cherchée est donc égale à $\dfrac{C_8^3 \cdot C_8^2 \cdot C_{16}^3}{C_{32}^8} \cong 0{,}083$.

b) Le nombre de mains sans as est égal à $C_4^0 \cdot C_{28}^8$

La probabilité cherchée est donc égale à $\dfrac{C_{28}^8}{C_{32}^8} \cong 0{,}295$.

c) Le nombre de mains sans coeur est égal à $C_8^0 \cdot C_{24}^8$.

La probabilité cherchée est donc égale à $1 - \dfrac{C_{24}^8}{C_{32}^8} \cong 0{,}930$.

2) a) 

On peut donc former $2 \cdot 9^5 \cdot 5 = 590'490$ de tels nombres

b) On peut former $A_9^7 = 181'440$ de tels nombres.

3) On a $\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k (3x^2)^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k$

Il s'agit de déterminer k tel que

$x^{14-2k} \cdot x^{-k} = x^5$

On a donc $14-3k=5 \Leftrightarrow k=3$

D'où le terme recherché est le suivant

$C_7^3 (3x^2)^4 \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 2835x^5$