Mathématiques I, section C	*Corrigé de l'épreuve écrite*

<u>Question I</u>

I)1) $z^6-8\sqrt{2}z^3+64=0$. En posant $t = z^3$: $t^2 -8\sqrt{2}t+64=0$;

$$\Delta= -128,\ t_1= 4\sqrt{2}(1+i) = 8\text{cis}\frac{\pi}{4} \text{ et } t_2 = 4\sqrt{2}(1-i) = 8\text{cis}\frac{-\pi}{4}$$

Reste à calculer les racines cubiques z_k et z'_k de t_1 et t_2,

avec $z_k= 2\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)$ où $k \in \{0;1,2\}$, c-à-d $z_0= 2\text{cis}\frac{\pi}{12}$; $z_1= 2\text{cis}\frac{3\pi}{4}$ et $z_2= 2\ \text{cis}\frac{17\pi}{12}$

et $z'_k= 2\ \text{cis}\left(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)$ où $k \in \{0;1,2\}$, c-à-d $z'_0= 2\text{cis}\frac{-\pi}{12}$; $z'_1= 2\text{cis}\frac{7\pi}{12}$ et $z'_2= 2\ \text{cis}\frac{5\pi}{4}$

$$\boxed{S= \{2\text{cis}\frac{\pi}{12}\ ;\ 2\text{cis}\frac{3\pi}{4}\ ;\ 2\ \text{cis}\frac{17\pi}{12}\ ;\ 2\text{cis}\frac{-\pi}{12}\ ;\ 2\text{cis}\frac{7\pi}{12}\ ;\ 2\ \text{cis}\frac{5\pi}{4}\}}$$

2) On a $z = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 2+\sqrt{2}-2i\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)} -2+\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2} = 4\text{cis}\frac{-\pi}{4}}$

Les 2 racines carrées t_k de z sont $t_k= 2\ \text{cis}\left(\frac{-\pi}{8}+\frac{2k\pi}{2}\right)$ avec $k \in \{0;1\}$, c-à-d $\boxed{t_0= 2\ \text{cis}\frac{-\pi}{8} \text{ et } t_1= 2\ \text{cis}\frac{7\pi}{8}}$.

De plus, $z^6 =(4\text{cis}\frac{-\pi}{4})^6 = 4096\ \text{cis}\frac{-3\pi}{2}$. Donc $\boxed{z^6= 4069\ i}$

<u>Question II</u>

1) a) $M(x,y,z)\in P=ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}+ l\ \overrightarrow{AC}$; $k\in\mathbb{R},\ l\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ y-2 & 4 & -5 \\ z-1 & 1 & -4 \end{vmatrix} =0 \Leftrightarrow \boxed{x+y-2z-1=0} \quad \text{(éq. cartésienne de P)}$$

b) Comme le vecteur normal $\vec{n}(1;1;-2)$ à P est un vecteur directeur de d' on a $\boxed{d' \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=1-2\alpha \end{cases}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

c) Les équations cartésiennes de d peuvent s'écrire $\begin{cases} x=y-1 \\ z=y+2 \end{cases}$ et si $y = k \in \mathbb{R}$ on a $d \equiv \begin{cases} x=k-1 \\ y=k \\ z=k+2 \end{cases}$

(équations paramétriques de d)

Un vecteur directeur de d est donc $\vec{u}(1\ ;1\ ;1)$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, car $\vec{u}\cdot\vec{n} = 1+1-2=0$

Donc les 2 droites sont orthogonales. Pour vérifier qu'elles sont perpendiculaires on peut, par exemple, identifier les systèmes d'équations paramétriques respectifs de d et d'.

$$\begin{cases} k-1=1+\alpha \\ k\ =\ 2+\alpha \\ k+2=1-2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-\alpha=2 \\ k-\alpha=2 \\ k+2\alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-\alpha=2 \\ k+2\alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ k=1 \end{cases}$$

Par conséquent, les droites d et d' sont perpendiculaires en $\boxed{I(0\ ;1\ ;3)}$

2) a) Le système (S) : $\begin{cases} mx-y+3z=2 \\ x+my+z=1 \\ 3x-2my+5z=3 \end{cases}$ admet une solution unique $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & -2m & 5 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow (7m-1)(m-2) \neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$ et $m \neq \frac{1}{7} \Leftrightarrow \boxed{m\in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{7}\ ;2\}}$

b) Pour m= 2 : (S) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -5y + z = 0 & (E2)/(E2)-2(E1) \\ -10y + 2z = 0 & (E3)/(E3)-3(E1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -5y + z = 0 \quad \text{(système indéterminé)} \\ 0 = 0 \end{cases}$

Posons $z=\alpha\in\mathbb{R}$ alors par (E2): $y = \frac{1}{5}\alpha$ et par (E1) : $x = -\frac{7}{5}\alpha+1$. D'où $\boxed{S= \left\{\left(-\frac{7}{5}\alpha+1; \frac{1}{5}\alpha; \alpha\right) / \alpha \in\mathbb{R}\right\}}$

Interprétation géométrique : Les équations du système sont celles de 3 plans sécants en la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = -\frac{7}{5}\alpha+1 \\ y = \frac{1}{5}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$,

droite passant par I(1,0,0) et de vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{7}{5};\frac{1}{5};1\right)$

Question III

1) a) Nombre de noms d'utilisateur possibles : $26^5\cdot 10^3$ =11'881'376'000
Si le début est MATH et le dernier chiffre est pair on a $1\cdot 26\cdot 10^2\cdot 5$ = 13'000 noms d'utilisateur.
b) Nombre de mots de passe : $A_{26}^2 \cdot A_{14}^3 \cdot A_{10}^3 = 1'022'112'000$
c) Tirages comprenant au moins un caractère spécial : $C_{50}^8 - C_{36}^8$=506'618'310

2) a) Calcul direct : 6 élèves (parmi les 12) aiment les complexes et 0 (parmi les 6) les probabilités ou bien : 5 compl et 1 proba ou 4 compl et 2 proba ou…ou 0 compl et 6 proba.
En tout, $C_{12}^6 C_6^0 + C_{12}^5 C_6^1 + C_{12}^4 C_6^2 + C_{12}^3 C_6^3 + C_{12}^2 C_6^4 + C_{12}^1 C_6^5 + C_{12}^0 C_6^6 = 18564$ cas

Autre méthode : Les 6 élèves sont à choisir parmi les 30-4-8= 18 élèves qui s'intéressent soit aux nombres complexes soit aux probabilités (mais pas aux deux) donc

$$p(A) = \frac{C_{18}^6}{C_{30}^6} = \frac{18564}{593775} \approx 0{,}03$$

b) Les 6 élèves sont à choisir parmi les 30-20 = 10 qui n'aiment pas les nombres complexes, donc

$$p(B) = \frac{C_{10}^6}{C_{30}^6} = \frac{2}{5655} \approx 0{,}0004$$

c) 0 ou 1 élèves des 6 aiment les probabilités, donc $p(C) = \dfrac{C_{14}^0 \cdot C_{16}^6 + C_{14}^1 \cdot C_{16}^5}{C_{30}^6} = \dfrac{152}{1305} \approx 0{,}116$
