

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2012

Section: C

Branche: mathématiques I

Numéro d'ordre du candidat

Question I

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^6 - 8\sqrt{2}z^3 + 64 = 0$ et donner les solutions sous formes trigonométriques.
(indication : on pourra poser $t = z^3$)

2) On pose $z = \left(-\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2$.

Déterminer les formes algébrique et trigonométrique de z , la forme trigonométrique de ses racines carrées complexes ainsi que la forme algébrique de z^6 .

12+8 = 20 points

Question II

1) Dans un repère orthonormé de l'espace on considère les points $A(1;2;1)$, $B(-1;6;2)$ et $C(-2;-3;-3)$ ainsi que la droite d d'équations cartésiennes:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $P = ABC$.

b) Déterminer des équations paramétriques de la droite d' orthogonale au plan P et passant par A .

c) Vérifier que d et d' sont orthogonales, puis calculer les coordonnées de leur point d'intersection I .

2) On considère le système (S) :

$$\begin{cases} mx - y + 3z = 2 \\ x + my + z = 1 \\ 3x - 2my + 5z = 3 \end{cases} \text{ où } m \text{ est un réel.}$$

a) Pour quelles valeurs du paramètre m , (S) admet-il une solution unique ?

b) Résoudre et interpréter géométriquement (S) si $m = 2$.

(4+2+4)+(5+5) = 20 points

Question III

1) a) Pour s'identifier au portail intranet « *myschool* » les élèves doivent donner leur nom d'utilisateur (*login*) composé de 5 lettres suivies de 3 chiffres. Combien y a-t-il, en théorie, de noms d'utilisateur possibles ? Parmi ceux-ci, combien commencent par MATH et se terminent par un chiffre pair ?

b) Dans une 2^e étape, il faut écrire un mot de passe de 8 caractères choisis parmi les 26 lettres de l'alphabet, les 10 chiffres (de 0 à 9) et les 14 caractères spéciaux (&, @, +, €, ...). Combien y a-t-il de mots de passe formés dans cet ordre : 2 lettres différentes, 3 caractères spéciaux différents et 3 chiffres distincts? (exemple : PI=+-314)

c) Afin de créer un mot de passe fiable, un élève s'amuse à recopier tous les caractères possibles sur des bouts de papier qu'il place dans une urne. Il ferme les yeux et tire simultanément 8 bouts de papier. Combien y a-t-il de tirages qui comprennent au moins un caractère spécial ?

2) Parmi les 30 élèves d'une classe de 1^{re} C, 20 aiment les nombres complexes, 14 aiment les probabilités, 8 aiment les deux et 4 élèves ne s'intéressent ni aux nombres complexes ni aux probabilités. Un professeur interroge au hasard 6 élèves de cette classe. Calculer la probabilité des événements :

A : « Chacun des six élèves aime soit les nombres complexes soit les probabilités (mais pas les deux) »

B : « Aucun des six élèves n'aime les nombres complexes »

C : « Au plus un élève aime les probabilités »

(4+3+3) + (3+3+4) = 20 points