Question 1

1) Si $b \in \mathbb{R}$, alors

$$p(bi)=0 \Leftrightarrow -2b^3 i - (3+8i)b^2 - 7b + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^3 - 8b^2 = 0 & ① \\ -3b^2 - 7b + 20 = 0 & ② \end{cases}$$

① : $-2b^2(b+4) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $b = -4$

$b = -4 \rightarrow$ ② : $-48 + 28 + 20 = 0$ ✓

Donc $-4i$ est la racine imaginaire pure de p et $p(z)$ est divisible par $(z+4i)$.

	2	$3+8i$	$7i$	20
$-4i$		$-8i$	$-12i$	-20
	2	3	$-5i$	0

Donc $p(z) = (z+4i)\underbrace{(2z^2+3z-5i)}_{q(z)}$

Racines de q : $\Delta = 9 + 40i$

R.C.C. de Δ. Si $a, b \in \mathbb{R}$,

alors $(a+bi)^2 = 9+40i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 9 \\ 2ab = 40 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{9^2+40^2} = 41 \end{cases}$

①+③ : $2a^2 = 50 \Leftrightarrow a = \pm 5$

③−① : $2b^2 = 32 \Leftrightarrow b = \pm 4$

Par ②, $RCC(\Delta) = \{5+4i \,;\, -5-4i\}$

Ainsi $z_1 = \frac{-3+5+4i}{4} = \frac{1}{2} + i$; $z_2 = \frac{-3-5-4i}{4} = -2-i$

$$S = \left\{-4i \,;\, \tfrac{1}{2}+i \,;\, -2-i\right\}$$

Et $p(z) = 2(z+4i)(z-\frac{1}{2}-i)(z+2+i)$

$$\Leftrightarrow p(z) = (z+4i)(2z-1-2i)(z+2+i)$$

2) a) $z_1 = \frac{3}{1+i} + \frac{2i}{1-i}$

$$= \frac{3-3i+2i+2i^2}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \qquad (3)$$

$|z_1| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z_3 = \frac{-z_1}{(z_2)^2}$

$$= \frac{\operatorname{cis}(\pi)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{4\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{cis}\left(\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right) \qquad (3)$$

$$z_3 = \frac{-z_1}{4\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}{4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$$

$$= \frac{-1+i}{4(1-\sqrt{3}i)} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{3}i+i-\sqrt{3}}{4\cdot(1+3)}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{3}}{16} + i\,\frac{1-\sqrt{3}}{16} \qquad (3)$$

Question 2

1) $\left(2x^3 - \frac{1}{4x}\right)^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i} (2x^3)^{10-i} \cdot \left(-\frac{1}{4}x^{-1}\right)^i \qquad (x \neq 0)$

$= \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\, 2^{10-i} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^i x^{30-4i}$

Terme en x^{10} : $30-4i = 10 \Leftrightarrow i = 5$

Pour $i = 5$ on obtient :

$C_{10}^{5} \cdot 2^5 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^5 \cdot x^{10} = \underline{-\frac{63}{8}x^{10}}$ (5)

2) a) $\underline{A_{24}^{20}} \simeq 2{,}585 \cdot 10^{22} = \frac{24!}{4!}$ (1)

b) $C_{20}^{5} = \underline{15504}$ (1)

c) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prési} \\ \text{et secr.}}}{A_{20}^{2}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3 membres}}}{C_{18}^{3}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3 membres}}}{C_{20}^{3}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prési, secr.}}}{A_{17}^{2}} = \underline{310'080}$ (2)

d) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{avec Julie} \\ \text{et Anne}}}{C_{18}^{3}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sans Julie} \\ \text{et sans Anne}}}{C_{18}^{5}} = 816 + 8568 = \underline{9384}$ (3)

e) $\underbrace{C_{12}^{4} \cdot C_{8}^{1}}_{\substack{\text{4 filles et} \\ \text{1 garçon}}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{5 filles}}}{C_{12}^{5}} = 3960 + 792 = \underline{4752}$ (3)

f) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{toutes les} \\ \text{délégations}}}{C_{20}^{5}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{celles avec} \\ \text{5 filles}}}{C_{12}^{5}} = 15'504 - 792 = \underline{14'712}$ (3)

Question 3

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= m + m + m - m^3 - 1 - 1$

$= -m^3 + 3m - 2$

$= (m-1)(-m^2 - m + 2)$

$= (m-1)^2 \cdot (-m-2)$

Ainsi (s) admet une solution unique, ssi $\det A \neq 0$

ssi $m \neq 1$ et $m \neq -2$

(5)

2) Pour $m = -2$ on obtient :

$\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ x - 2y + z = -6 \\ -2x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ -3y + 3z = -10 \\ 3y - 3z = 10 \end{cases}$ ⇔

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\alpha - y \\ -3y = -10 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \frac{2}{3} \\ y = \alpha + \frac{10}{3} \\ z = \alpha \end{cases}$

$S_{-2} = \{(\alpha + \frac{2}{3} ; \alpha + \frac{10}{3} ; \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Int. géo : Il s'agit de 3 plans dont l'intersection est la droite $d(A, \vec{u})$ où $A(\frac{2}{3} ; \frac{10}{3} ; 0)$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(5)

Question 4

1) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Comme $\vec{AB} \neq k \cdot \vec{AC}$ $(\forall k \in \mathbb{R})$, A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

(4)

$X(x,y,z) \in \pi_1 \Leftrightarrow \det(\vec{CX}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & -4 & 1 \\ y & 2 & 1 \\ z+4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -5(x-6) - 7y - 6(z+4) = 0 \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow 5x + 7y + 6z - 6 = 0 \equiv \pi_1$

2) $\begin{cases} -2x + 3y - 6z = -12 \\ 2x - 2y + 4z = 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2z = -2 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$

(3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = +3 \\ y = 2\alpha - 2 \\ z = \alpha \end{cases} \equiv d$

3) Le vecteur directeur de d, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, est un vecteur normal de π_2

Donc $\pi_2 \equiv 2y + z + d = 0$.

(3) $A(5; -1; -2) \in \pi_2 \Leftrightarrow -2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4 \quad \rightarrow \quad \pi_2 \equiv 2y + z + 4 = 0$

(1) 4) $P(0; 0; z) \in \pi_1 \Leftrightarrow 6z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \quad \rightarrow \quad P(0; 0; 1)$