I. 1) Soit $P(z) = 2z^3 - (5-6i)z^2 + 6(1+3i)z - 99 + 18i$. Notons $z_0 = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$ la racine imaginaire pure.

On a : $P(z_0) = 0 \Leftrightarrow 2(bi)^3 - (5-6i)(bi)^2 + 6(1+3i)bi - 99 + 18i = 0$

$\Leftrightarrow -2b^3i + (5-6i)b^2 + 6bi - 18b - 99 + 18i = 0$

$\Leftrightarrow -2b^3i + 5b^2 - 6b^2i + 6bi - 18b - 99 + 18i = 0$

$\Leftrightarrow 5b^2 - 18b - 99 + \left(-2b^3 - 6b^2 + 6b + 18\right)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5b^2 - 18b - 99 = 0 & (E_1) \\ -2b^3 - 6b^2 + 6b + 18 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

On résout (E_1) par $\Delta = \ldots = 48^2$ et $b = \frac{18 \pm 48}{10} \Rightarrow \left(b = -3 \text{ ou } b = \frac{33}{5}\right)$

On vérifie dans (E_2) : $-2(-3)^3 - 6(-3)^2 + 6(-3) + 18 = \ldots = 0$, et $-2\left(\frac{33}{5}\right)^3 - 6\left(\frac{33}{5}\right)^2 + 6\frac{33}{5} + 18 = -\frac{100\,719}{125} \neq 0$

Donc $z_0 = -3i$. Horner :

	2	$-5+6i$	$6+18i$	$-99+18i$
$-3i$		$-6i$	$15i$	$99-18i$
	2	-5	$6+33i$	0

Donc $P(z) = (z+3i)\left(2z^2 - 5z + 6 + 33i\right)$. Il reste à résoudre $2z^2 - 5z + 6 + 33i = 0$

discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2(6+33i) = -23 - 264i = (a+bi)^2$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -23 \\ 2ab = -264 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-23)^2 + (-264)^2} = 265 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} a^2 = \frac{-23+265}{2} = 121 \\ a \text{ et } b \text{ de signes contraires} \\ b^2 = \frac{-23-265}{-2} = 144 \end{cases}$$

Donc Δ admet les deux racines carrées complexes opposées $\delta_1 = 11 - 12i$ et $\delta_2 = -11 + 12i$

Donc P admet en plus les racines $z_1 = \frac{5+11-12i}{4} = 4 - 3i$ et $z_1 = \frac{5-11+12i}{4} = -\frac{3}{2} + 3i$.

Conclusion : $P(z) = 0$ admet l'ens des sol. $\boxed{S = \left\{-3i\ ;\ 4-3i\ ;\ -\frac{3}{2} + 3i\right\}}$

2) $z = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ admet les racines carrées $z_k = \sqrt{1}\operatorname{cis}\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}$ pour $k \in \{0;1\}$, c.-à-d. $\begin{cases} z_0 = \operatorname{cis}\frac{\pi}{8} \\ z_1 = -\operatorname{cis}\frac{\pi}{8} \end{cases}$ (f. trig.)

D'autre part, $z = \operatorname{cis}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = (a+bi)^2$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} 2a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ a \text{ et } b \text{ de même signe} \\ -2b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ a \text{ et } b \text{ de même signe} \\ b^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Donc $a = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $b = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et z admet les deux racines carrées complexes opposées

$z_0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $z_1 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (formes algébriques).

En identifiant formes trig. et alg., on obtient $\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$.

II. 1) $$\left(\frac{2}{3x} - \frac{x^3}{4}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k C_{10}^k \left(\frac{2}{3x}\right)^{10-k}\left(\frac{x^3}{4}\right)^k$$

Pour le terme en x^{18} on a $\left(x^{-1}\right)^{10-k} \cdot \left(x^3\right)^k = x^{18} \Rightarrow k - 10 + 3k = 18 \Rightarrow \boxed{k = 7}$.

Il s'agit donc de $(-1)^7 C_{10}^7 \left(\frac{2}{3x}\right)^3 \left(\frac{x^3}{4}\right)^7 = -120\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^7 x^{18} = \boxed{-\frac{5}{2304}x^{18}}$

2) a) On tire trois boules successivement avec remise. Il y a $B_{32}^3 = 32^3 = 32\,768$ tirages possibles. Il y a 3 boules de la même couleur ssi. toutes 3 sont rouges ou bien vertes ou bien bleues, c.-à-d. dans $B_{16}^3 + B_{12}^3 + B_4^3 = 16^3 + 12^3 + 4^3 = 5888$ tirages favorables.

Donc $p(3 \text{ b. m̂ coul.}) = \frac{5888}{32\,768} \approx \boxed{17{,}97\%}$.

b) On tire simultanément 4 boules. Il y a $C_{32} = 35\,960$ tirages possibles. Il y a au moins une boule bleue dans tous ces tirages, sauf dans ceux qui ne comportent aucune bleue, c.-à-d. dans $C_{32}^4 - C_{28}^4 = 35\,960 - 20\,475 = 15\,485$ tirages.

Donc $p(\text{aucune b. bl.}) = \frac{15\,485}{35\,960} \approx \boxed{43{,}06\%}$.

c) On tire deux boules successivement sans remise.
Il y a deux boules de couleurs différentes dans tous les tirages possibles, sauf dans ceux à 2 boules de même couleur, c.-à-d. dans $A_{32}^2 - \left(A_{16}^2 + A_{12}^2 + A_4^2\right) = 32 \cdot 31 - (16 \cdot 15 + 12 \cdot 11 + 4 \cdot 3) = \boxed{608 \text{ tirages}}$.

- *autrement :*
Il y a deux boules de couleurs différentes dans les tirages de la forme

$$((rv) \text{ ou bien } (rb) \text{ ou bien } (vb)) \text{ à permutation de l'ordre près}$$

c.-à-d. dans $(16 \cdot 12 + 16 \cdot 4 + 12 \cdot 4) \cdot 2! = 608$ tirages

d) On tire trois boules successivement sans remise. Il y a exactement 1 boule verte dans les tirages de la forme

$$(1^{\text{ère}} \text{verte puis 2 non-vertes}) \text{ à la position de la verte près}$$

c.-à-d. dans $\left(A_{12}^1 \cdot A_{20}^2\right) \cdot 3 = (12 \cdot 20 \cdot 19) \cdot 3 = \boxed{13\,680 \text{ tirages}}$.

- *autrement :*
Il y a exactement 1 boule verte dans les tirages de la forme

$$\underbrace{(1 \text{ verte et 2 non-vertes})}_{\text{sans ordre}} \text{ à permutation de l'ordre près}$$

c.-à-d. dans $\left(C_{12}^1 \cdot C_{20}^2\right) \cdot 3! = \left(12 \cdot \frac{20 \cdot 19}{2}\right) \cdot 6 = 13\,680$ tirages.

III. 1) a) Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} -m & 2 & -3 \\ 2 & -5m & -8 \\ -3 & 8m & 13 \end{vmatrix} = \cdots = m^2 - 3m - 4 = (m+1)(m-4)$

Donc le système admet une solution unique pour $\boxed{m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}}$

b) Si $m = -1$, le système devient $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ -3x - 8y + 13z = -7 \end{cases}$ et on résout

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ -3x - 8y + 13z = -7 \end{cases} \underset{(E_3)/(E_3)+3(E_1)}{\overset{(E_2)/(E_2)-2(E_1)}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y - 2z = 2 \\ -2y + 4z = -4 \end{cases} \overset{(E_3)/(E_3)+2(E_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y - 2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé.

Posons $\boxed{z = \alpha}$ paramètre réel et le système devient $\begin{cases} x = 1 - 2(2\alpha + 2) + 3\alpha = -\alpha - 3 \\ y = 2\alpha + 2 \end{cases}$

et donc $\boxed{S = \{(-\alpha - 3; 2\alpha + 2; \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\}}$.

Donc le système correspond à 3 équations cartésiennes de plans de l'espace se coupant en une seule droite $d \equiv \begin{cases} x = -\alpha - 3 \\ y = 2\alpha + 2 \\ z = \alpha \end{cases} \equiv \begin{cases} x + 3 = -\alpha \\ y - 2 = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ passant par $M(-3; 2; 0)$ et de v.dir. $\overrightarrow{v}(-1; 2; 1)$.

2) a) $M(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 2 & 4 \\ y-2 & 1 & -3 \\ z-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow -7x - 6y - 10z + 1 = 0$

Donc $\boxed{\pi \equiv 7x + 6y + 10z - 1 = 0}$.

b) Le vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ étant vecteur directeur pour d, on a

$$M(x; y; z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x + 3 = 7k \\ y - 2 = 6k \\ z - 1 = 10k \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x + 3 = 7\frac{y-2}{6} \\ \frac{y-2}{6} = k \\ z - 1 = 10\frac{y-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 18 = 7y - 14 \\ 3z - 3 = 5y - 10 \end{cases}$$

Donc $\boxed{d \equiv \begin{cases} 6x + 18 - 7y + 14 = 0 \\ 3z - 3 - 5y + 10 = 0 \end{cases}}$
