

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2012

Section : C

Branche : mathématiques I

Numéro d'ordre du candidat

juin 2012

I. 1) Soit $P(z) = 2z^3 - (5 - 6i)z^2 + 6(1 + 3i)z - 99 + 18i$. Sachant que P admet une racine imaginaire pure, résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans \mathbb{C} .

2) Soit $z = \text{cis } \frac{\pi}{4}$. Chercher les racines carrées complexes de z sous leur forme trigonométrique et sous leur forme algébrique. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

(14 + 6 = 20 points)

II. 1) Déterminer le terme en x^{18} du développement de $\left(\frac{2}{3x} - \frac{x^3}{4}\right)^{10}$.

2) On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant 16 boules rouges, 12 boules vertes et 4 boules bleues.

a) On tire trois boules successivement avec remise. Calculer la probabilité que ce soient 3 boules de la même couleur.

b) On tire simultanément 4 boules. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une boule bleue.

c) On tire deux boules successivement sans remise. Dans combien de tels tirages y a-t-il deux boules de couleurs différentes ?

d) On tire trois boules successivement sans remise. Dans combien de tels tirages y a-t-il exactement 1 boule verte ?

(6 + 14 = 20 points)

III. 1) a) Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles le système suivant admet une solution unique dans \mathbb{R}^3 .

$$\begin{cases} -mx + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 5my - 8z = 4 \\ -3x + 8my + 13z = 7m \end{cases}$$

b) Résoudre le système pour $m = -1$ et en donner une interprétation géométrique dans l'espace.

2) Soit un point $A(-3; 2; 1)$ et les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan π passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .

b) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite d passant par A et perpendiculaire à π .

(11 + 9 = 20 points)