Corrigé modèle C, juin 2011

Question I ((4+6+2)+(2+6) = 20 points)

1) $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, $z_2 = \frac{-5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ et $u = \frac{(z_1)^2}{z_2}$

a) module: $|z_1| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$; argument: $\tan\theta_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\theta_1 \in 4^{\text{ème}}$ quadrant, donc $\theta_1 \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

D'où: $z_1 = \sqrt{3}\ \mathrm{cis}(-\frac{\pi}{6})$.

module: $|z_2| = \sqrt{\frac{25}{2} + \frac{25}{2}} = 5$; argument: $\tan\theta_2 = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\frac{-5\sqrt{2}}{2}} = -1$ et $\theta_2 \in 2^{\text{ème}}$ quadrant, donc $\theta_2 \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

D'où: $z_2 = 5\ \mathrm{cis}\frac{3\pi}{4}$.

b) Forme algébrique de u:

$$u = \frac{(z_1)^2}{z_2} = \frac{[\frac{1}{2}(3-\sqrt{3}\mathrm{i})]^2}{\frac{5\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})} = \frac{\frac{1}{4}(9\ 6\sqrt{3}\mathrm{i}-3)(-1-\mathrm{i})}{\frac{5\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})} = \frac{\frac{3}{2}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}{\frac{5\sqrt{2}}{2}(1+1)} = \frac{\frac{3}{2}[(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})\mathrm{i}]}{5\sqrt{2}}$$

Finalement: $u = \frac{3}{10\sqrt{2}}[(-1-\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})\mathrm{i}] = \frac{3\sqrt{2}}{20}(-1-\sqrt{3}) + \frac{3\sqrt{2}}{20}(-1+\sqrt{3})\mathrm{i}$ (1).

Forme trigonométrique de u:

$$u = \frac{(z_1)^2}{z_2} = \frac{[\sqrt{3}\ \mathrm{cis}(-\frac{\pi}{6})]^2}{5\ \mathrm{cis}\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\ \mathrm{cis}(-\frac{\pi}{3})}{5\ \mathrm{cis}\frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{5}\mathrm{cis}(-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}) = \frac{3}{5}\mathrm{cis}(-\frac{13\pi}{12}) = \frac{3}{5}\mathrm{cis}\frac{11\pi}{12}\ \ (2)$$

c) Par identification de (1) et (2):

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{20}(-1-\sqrt{3}) = \frac{3}{5}\cos\frac{11\pi}{12} & (3) \\ \frac{3\sqrt{2}}{20}(-1+\sqrt{3}) = \frac{3}{5}\sin\frac{11\pi}{12} & (4) \end{cases}$$

En divisant (4) par (3): $\tan\frac{11\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}} = \frac{(-1+\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})}{(-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3})} = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2+\sqrt{3}$

2) a) $z^3 = 8 \Leftrightarrow z$ est une racine cubique de $8 = 8\ \mathrm{cis}\ 0$.

Or, celles-ci sont égales à: $z_0 = \sqrt[3]{8}\ \mathrm{cis}\ 0 = 2$, $z_1 = 2\ \mathrm{cis}\frac{2\pi}{3}$ et $z_2 = 2\ \mathrm{cis}\frac{4\pi}{3}$. Ainsi $S = \{z_0, z_1, z_2\}$.

b) $2z^2 + (\mathrm{i}-3)z + 10 + 6\mathrm{i} = 0$

$\Delta = (\mathrm{i}-3)^2 - 8(10+6\mathrm{i}) = -1-6\mathrm{i}+9-80-48\mathrm{i} = -72-54\mathrm{i} = (3-9\mathrm{i})^2$

$z_1 = \frac{-(\mathrm{i}-3)-(3-9\mathrm{i})}{4} = 2\mathrm{i}$; $z_2 = \frac{-(\mathrm{i}-3)+(3-9\mathrm{i})}{4} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i}$

D'où: $S = \{z_1, z_2\}$.

Question II ((5+3+3)+9 = 20 points)

1) π_1 admet l'équation cartésienne $2x - 4y + 3z + 5 = 0$; π_2 admet l'équation cartésienne $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

a) $\begin{cases} 2x-4y+3z+5=0 \\ x-2y+3z-2=0 \end{cases} \quad L_2 \to 2L_2 - L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y+3z+5=0 \\ 3z-9=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y+3z+5=0 \\ z=3 \end{cases}$

Avec les inconnues principales x et z ainsi que le paramètre y, on obtient:

$2x-4y+3\cdot 3+5=0 \Leftrightarrow 2x=-14+4y \Leftrightarrow x=-7+2y$

En posant $h = y$, on obtient la représentation paramétrique suivante, qui est bien celle d'une droite d:

$$\begin{cases} x=-7+2h \\ y=h \qquad (h \in \mathbb{R}) \\ z=3 \end{cases}$$

Il en résulte que la droite d admet le v.d. $\vec{u} = (2;1;0)$ et passe par le point $P(-7;0;3)$.

b) Un vecteur normal de π_3 est le vecteur directeur $\vec{u} = (2;1;0)$ de d. D'où:

$M(x,y,z) \in \pi_3 \Leftrightarrow \vec{AM} = (x-2,y+2,z) \perp \vec{u} = (2;1;0) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(x-2) + (y+2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$

c) Un vecteur directeur de d' est le vecteur normal $\vec{n} = (2;-4;3)$ de π_1. D'où le système d'équations cartésiennes suivant de la droite d':

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-0}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-2)=2z \\ 3(y+2)=-4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2z-6=0 \\ 3y+4z+6=0 \end{cases}$$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} m+2 & m \\ -3 & m-2 \end{pmatrix}$ la matrice du système $\begin{cases} (m+2)x+my=1 \\ -3x+(m-2)y=-1 \end{cases}$.

$\det A = (m+2)(m-2)+3m = m^2+3m-4 = (m+4)(m-1)$

$\boxed{\text{Cas 1: } \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4 \text{ et } m \neq 1}$

Le système est de Cramer et possède une solution unique. On a:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -(m+2)+3 = -m+1 = -(m-1)$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & m \\ -1 & m-2 \end{vmatrix} = (m-2)+m = 2m-2 = 2(m-1)$$

D'où: $x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{-(m-1)}{(m+4)(m-1)} = -\dfrac{1}{m+4}$; $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{2(m-1)}{(m+4)(m-1)} = \dfrac{2}{m+4}$.

$S = \{(-\frac{1}{m+4}, \frac{2}{m+4})\}$

$\boxed{\text{Cas 2: } \det A = 0 \text{ et } m = -4}$

Le système s'écrit: $\begin{cases} -2x - 4y = 1 \\ -3x - 6y = -1 \end{cases} \quad L_2 \to 2L_2 - 3L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y = 1 \\ 0x + 0y = -5 \end{cases}$.

La 2$^{\text{ème}}$ équation étant impossible, on a $S = \varnothing$.

$\boxed{\text{Cas 3: } \det A = 0 \text{ et } m = 1}$

Le système s'écrit: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -3x - y = -1 \end{cases}$.

La 2$^{\text{ème}}$ ligne étant un multiple de la 1$^{\text{ère}}$, on peut la biffer. D'où: $S = \{(x, 1-3x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$.

Question III ((2+2+4+5)+(3+4) = 20 points)

1) a) Chaque fiche est un arrangement à répétition de 3 objets pris 11 à 11. Il y a donc $B_3^{11} = 3^{11} = 177147$ fiches différentes possibles.

b) Cas possibles: $\#\Omega = 177147$. Cas favorables: $\#A = 1$. Probabilité: $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{1}{177147}$.

c) Calculons d'abord la probabilité de $\overline{B}$ « n'écrire aucun 0 ».

Cas favorables: il faut choisir un arrangement à répétition de 2 objets (le « 1 » ou le « 2 ») pris 11 à 11, donc $\#\overline{B} = B_2^{11} = 2^{11} = 2048$.

Probabilité: $P(\overline{B}) = \dfrac{\#\overline{B}}{\#\Omega} = \dfrac{2048}{177147}$. D'où: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{2048}{177147} = \dfrac{175099}{177147} \approx 98,84\%$.

d) Cas favorables: il faut choisir 2 cases parmi 11 pour placer les numéros incorrects ($C_{11}^2 = 55$ choix) et un numéro incorrect pour la 1ère case choisie (2 choix) et un numéro incorrect pour la 2ème case choisie (2 choix) et le numéro correct pour toutes les autres cases (1 choix). D'où: $\#C = 55 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 220$.

Probabilité: $P(C) = \dfrac{\#P(C)}{\#P(\Omega)} = \dfrac{220}{177147} \approx 0,12\%$.

2) a) Il faut choisir 2 animateurs parmi 5 ($C_5^2 = 10$ choix) et 10 enfants parmi 34 ($C_{34}^{10} = 131128140$ choix). Il y a donc $10 \cdot 131128140 = 1311281400$ remplissages possibles.

b) Il faut choisir l'animateur A (1 choix), un autre animateur parmi 4 (4 choix), 5 garçons parmi 18 ($C_{18}^5 = 8568$ choix) et 5 filles parmi 16 ($C_{16}^5 = 4368$ choix). Il y a donc $1 \cdot 4 \cdot 8568 \cdot 4368 = 149700096$ remplissages possibles.