Corrigé

I 1)

$z_1 = -\sqrt{3} - i$

$|z_1| = 2$

$\tan \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et φ_1 est dans le 3e quadrant

donc $\varphi_1 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

et $\underline{\underline{z_1 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}}} = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

$z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$|z_2| = 2$

$\tan \varphi_2 = -1$ et φ_2 est dans le 4e quadrant

donc $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

et $\underline{\underline{z_2 = 2 \cdot \operatorname{cis} \frac{-\pi}{4}}}$

$$(z_1)^7 \cdot (z_2)^2 = 2^7 \operatorname{cis} \frac{49\pi}{6} \cdot 2^2 \operatorname{cis} \frac{-\pi}{2} = 2^9 \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{cis} \frac{-\pi}{2} = \underline{\underline{2^9 \cdot \operatorname{cis} \frac{-\pi}{3}}}$$

2) $P(z) = 3z^3 + (1+5i)z^2 + \left(i - \frac{5}{2}\right)z - \frac{1}{2}i$

a) $(a+bi)^2 = 3+4i$ avec $a; b \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+bi)^2 = 3+4i \\ |a+bi|^2 = |3+4i| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & ① \\ 2ab = 4 & ② \\ a^2 + b^2 = 5 & ③ \end{cases}$$

$\frac{①+③}{2}$: $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = -2$ ou $a = 2$

$\frac{①-③}{2}$; $-b^2 = -1 \Leftrightarrow b = 1$ ou $b = -1$

De ②, a et b ont le même signe.

Donc les racines carrées complexes de $3+4i$ sont $\underline{\underline{2+i \text{ et } -2-i}}$

b) HORNER :

	3	$1+5i$	$i - \frac{5}{2}$	$\frac{-1}{2}i$
$-i$		$-3i$	$-i+2$	$\frac{1}{2}i$
	3	$1+2i$	$-\frac{1}{2}$ ‖	0

donc $P(-i) = 0$ et $P(z) = (z+i) \cdot \left[3z^2 + (1+2i)z - \frac{1}{2}\right]$

$\Delta = (1+2i)^2 + 6$

$= 3 + 4i$

$z_1 = \frac{-1-2i+2+i}{6} = \frac{1-i}{6}$

$z_2 = \frac{-1-2i-2-i}{6} = \frac{-1-i}{2}$

D'où $P(z) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{z = -i \text{ ou } z = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}i \text{ ou } z = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i}}$.

II 1) $\begin{cases} x+2y-5z=0 \\ 4x+6y-2z=0 \\ mx+y+4z=-2 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \\ m & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ m & 1 \end{matrix} = 24-4m-20+30m+2-32$$
$$= 26m-26$$

$\Delta = 0 \iff 26m-26=0 \iff m=1$

Si $m \neq 1$, le système admet une seule solution.

Si $m=1$, $\begin{cases} x+2y-5z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ x+y+4z=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y-5z=0 & \\ -y+9z=0 & L_2 \mid L_2-2L_1 \\ -y+9z=-2 & L_3 \mid L_3-L_1 \end{cases}$

impossible $S=\emptyset$

le système n'admet pas de solution.

2) $\pi \equiv x-2y-z=8$ $\quad g \equiv \begin{cases} x-y=4 \\ y+z=3 \end{cases}$ $\quad A(-1;-2;1)$

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de π,

donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d.

$M(x;y;z) \in d$

$\iff \exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$

$\iff \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = k-1 \\ y = -2k-2 \\ z = -k+1 \end{cases}$ syst. d'équations param. de d

$M(x;y;z) \in d \cap \pi$

$\iff \exists k \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=k-1 \\ y=-2k-2 \\ z=-k+1 \\ x-2y-z=8 \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x=k-1 \\ y=-2k-2 \\ z=-k+1 \\ (k-1)-2(-2k-2)-(-k+1)=8 \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{R} \begin{cases} x=k-1 \\ y=-2k-2 \\ z=-k+1 \\ 6k=6 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x=k-1 \\ y=-2k-2 \\ z=-k+1 \\ k=1 \end{cases}$ d'où $d \cap \pi = \{M(0;-4;0)\}$

b) $B(2;-2;5)$ $\quad C(5;1;2)$ sont deux points de g.

A, B, C sont 3 points non alignés car $A \notin g$.

$M(x;y;z) \in \alpha \iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0 \iff \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 6 \\ y+2 & 0 & 3 \\ z-1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 9\cdot(z-1) + 24(y+2) - 12(x+1) - 3(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 9z - 9 + 24y + 48 - 12x - 12 - 3y - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -12x + 21y + 9z + 21 = 0 \quad \big| : (-3)$

$\Leftrightarrow \quad \underline{4x - 7y - 3z - 7 = 0}$ éq. cart. de α

III 1) $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11} = \frac{1}{x^{11}} \cdot \left(3x^3 - 1\right)^{11} = \frac{1}{x^{11}} \cdot \sum_{k=0}^{11} C_{11}^{k} \left(3x^3\right)^{11-k} \cdot (-1)^k$

condition : $3\cdot(11-k) - 11 = 7 \Leftrightarrow -3k = -15 \Leftrightarrow k = 5$

Le terme en x^7 est $C_{11}^{5} \cdot 3^6 \cdot (-1)^5 \cdot x^7 = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} \cdot 3^6 \cdot (-1) \cdot x^7$

$= \underline{-336'798 \cdot x^7}$

2) 8 rouges
3 blanches
9 noires

On tire 5 boules au hasard et simultanément.

$\# \Omega = C_{20}^{5}$

a) $p(\text{5 de même couleur}) = \frac{C_8^5 + C_9^5}{C_{20}^5} = \frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2}}{\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}} = \frac{56 + 126}{15504}$

$= \frac{91}{7752} \approx \underline{1,17\ \%}$

b) $p'(\text{2 rouges, 1 blanche, 2 noires}) = \frac{C_8^2 \cdot C_3^1 \cdot C_9^2}{C_{20}^5} = \frac{28\cdot 3\cdot 36}{15504}$

$= \frac{63}{323} \approx \underline{19,50\ \%}$

c) $p(\text{au moins 3 noires})$

$= \frac{C_9^3 \cdot C_{11}^2 + C_9^4 \cdot C_{11}^1 + C_9^5}{C_{20}^5} = \frac{84\cdot 55 + 126\cdot 11 + 126}{15504}$

$= \frac{511}{1292} \approx \underline{39,55\ \%}$

3) Équipes avec Jim et Fred : C_{18}^{9}

Équipes sans Jim et sans Fred : C_{18}^{11}

nombre d'équipes : $C_{18}^{9} + C_{18}^{11} = \frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$

$= 48620 + 31824 = \underline{80'444}$