Corrigé : Examen 2015

15 SEP. 2015

I) 1) $P_\alpha(z) = z^3 + (-3+\alpha)z^2 + 2\bar{\alpha}\, z + i\,|\alpha|^2 \quad , \alpha \in \mathbb{C}$

a) $z_0 = -i$ est une racine de $P_\alpha(z) \Leftrightarrow P_\alpha(-i) = 0$

$\Leftrightarrow (-i)^3 + (-3+\alpha)(-i)^2 + 2\bar{\alpha}\cdot(-i) + i\,|\alpha|^2 = 0$

$\Leftrightarrow i + (-3+\alpha)\cdot(-1) - 2\bar{\alpha}\, i + i\,|\alpha|^2 = 0$

$\Leftrightarrow i + 3 - \alpha - 2\bar{\alpha}\, i + i\,|\alpha|^2 = 0$ Poser $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$, avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow i + 3 - (\alpha_1 + \alpha_2 i) - 2(\alpha_1 - \alpha_2 i)i + i(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = 0$

$\Leftrightarrow (3 - \alpha_1 - 2\alpha_2) + (1 - \alpha_2 - 2\alpha_1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1 - \alpha_2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 - 2\alpha_2 \\ (3-2\alpha_2)^2 + \alpha_2^2 - 2(3-2\alpha_2) - \alpha_2 + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 - 2\alpha_2 & (1) \\ 9 - 12\alpha_2 + 4\alpha_2^2 + \alpha_2^2 - 6 + 4\alpha_2 - \alpha_2 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow 5\alpha_2^2 - 9\alpha_2 + 4 = 0 \qquad (\Delta = 81 - 80 = 1)$

$\Leftrightarrow \alpha_2 = \dfrac{9-1}{10} = \dfrac{4}{5}$ ou $\alpha_2 = \dfrac{9+1}{10} = 1$

Si $\alpha_2 = \frac{4}{5}$, alors (1): $\alpha_1 = 3 - \frac{8}{5} = \frac{7}{5}$ et $\alpha = \frac{7}{5} + \frac{4}{5} i$

Si $\alpha_2 = 1$, alors (1): $\alpha_1 = 3 - 2 = 1$ et $\alpha = 1 + i$

b) $P_\alpha(-1) = -1 + (-3+\alpha)\cdot 1 + 2\bar{\alpha}\cdot(-1) + i\,|\alpha|^2$

$= -4 + \alpha - 2\bar{\alpha} + i\,|\alpha|^2$

$P_{7/5 + 4/5 i}(-1) = -4 + \frac{7}{5} + \frac{4}{5} i - 2\left(\frac{7}{5} - \frac{4}{5} i\right) + i\left(\frac{49}{25} + \frac{16}{25}\right)$

$= -4 + \frac{7}{5} + \frac{4}{5} i - \frac{14}{5} + \frac{8}{5} i + \frac{13}{5} i$

$= -\frac{27}{5} + 5i \neq -5 + 5i$

$P_{1+i}(-1) = -4 + (1+i) - 2(1-i) + i - 2 = -5+5i$, $\alpha = 1+i$ vérifie la condition

c) Posons $P(z) = P_{1+i}(z)$.

Alors $P(z) = z^3 + (-2+i)z^2 + 2(1-i)z + 2i$

$P(-i) = 0$, donc $P(z)$ est divisible par $z+i$.

Il existe un polynôme $Q(z)$ du 2^{nd} degré en z tel que

$P(z) = (z+i)\,Q(z)$.

Utilisons le schéma de Horner pour calculer les coefficients de $Q(z)$

$P(z)$	1	$-2+i$	$2-2i$	$2i$
$-i$		$-i$	$2i$	$-2i$
$Q(z)$	1	-2	2	0

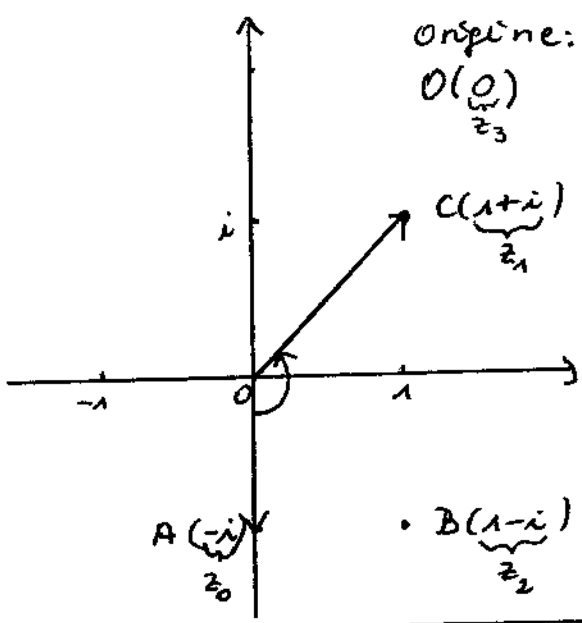
$P(z) = (z+i)\,Q(z)$ avec $Q(z) = z^2 - 2z + 2$

$\Delta'_Q = 1 - 2 = -1 = i^2$

Les racines de $Q(z)$ sont : $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1-i$.

$S_P = \{-i\,;\,1+i\,;\,1-i\}$

d)



$(\vec{OA}, \vec{OC}) \equiv \arg \dfrac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3} \quad (2\pi)$

$\equiv \arg \dfrac{1+i}{-i} \quad (2\pi)$

$\equiv \arg(-1+i) \quad (2\pi)$

$\equiv \arg\left[\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right] \quad (2\pi)$

$\equiv \dfrac{3\pi}{4} \quad (2\pi)$

e) $C(1+i) = \left(h_{(0,k)} \circ r_{(0,\beta)}\right)(A(-i))$, où $h_{(0,k)}$ est l'homothétie de centre O et de rapport positif k et $r_{(0,\beta)}$ la rotation de centre O et d'angle β $\Leftrightarrow z_C = (k \operatorname{cis} \beta) \cdot z_A$

$\Leftrightarrow k \operatorname{cis} \beta = \frac{1+i}{-i} \Leftrightarrow k \operatorname{cis} \beta = \sqrt{2} \cdot \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ (voir d))

$\Leftrightarrow k = \sqrt{2}$ et $\beta \equiv \frac{3\pi}{4} (2\pi)$

Donc $C = \left(h_{(0,\sqrt{2})} \circ r_{(0,\frac{3\pi}{4})}\right)(A)$

---

2) $z = x+yi$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $Z = z - \frac{1}{z}$ avec $z \neq 0$

a) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $Z = x+yi - \frac{1}{x+yi} = \frac{(x+yi)^2 - 1}{x+yi}$

$$= \frac{[(x^2-y^2-1) + 2xyi](x-yi)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{[x(x^2-y^2-1) + 2xy^2] + [2x^2y - (x^2-y^2-1)y]i}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2} + \frac{y(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2} \cdot i$$

$Z \in i\mathbb{R}$, avec $z \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2+y^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\text{éq. cartésienne de } (Oy)}$ ou $\underbrace{x^2+y^2=1}_{\text{éq. cartésienne du cercle } \mathcal{C}(O,1)}$

$E = ((Oy) - \{O\}) \cup \mathcal{C}(O,1)$

II) 1) $C_m^2 + m\cdot n + C_n^2 = \dfrac{m!}{2!\,(m-2)!} + m\cdot n + \dfrac{n!}{2!\,(n-2)!}$

$$= \frac{m(m-1)}{2} + m\cdot n + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(m^2 - m + 2m\cdot n + n^2 - n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(m+n)^2 - (m+n)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(m+n)(m+n-1) = C_{m+n}^2. \text{ Donc } p = m+n.$$

---

2)

L	L	L	CH	CH	CH	CH	CH

L : lettre
CH : chiffre

a) Les lettres ne sont pas forcément distinctes.
On a donc 3 possibilités pour choisir chacune des lettres. Ainsi on a $B_3^3 = 3^3 = 27$ possibilités pour choisir les 3 lettres.

Les chiffres étant distincts, on a $A_9^5 = \dfrac{9!}{4!} = 15120$ possibilités pour choisir les 5 chiffres ordonnés.

On peut définir : $B_3^3 \cdot A_8^5 = 408240$ codes.

---

b) Pour les lettres, on a 2 cas :
- 3 fois la lettre A : 1 possibilité
- 2 fois la lettre A : $\underbrace{C_3^2}_{\text{nbre de positions des 2 lettres A}} \cdot \underbrace{C_2^1}_{\text{nbre de choix pour la 3e lettre}} = 3\cdot 2 = 6$ possibilités

Pour les chiffres, on a $\underbrace{A_5^2}_{\text{nbre de positions des chiffres 1 et 6}} \cdot \underbrace{A_7^3}_{\text{nbre de choix pour les 3 chiffres restant.}} = 20\cdot 210 = 4200$ possibilités

Nombre de codes : $(1+6)\cdot 4200 = 29400$

3) Ω est l'ensemble des dix mots de la phrase.

a) $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

rien $\longrightarrow -20$
ne $\longrightarrow 10$
sert $\longrightarrow 10$
de $\longrightarrow 10$
courir $\longrightarrow 20$
il $\longrightarrow 10$
faut $\longrightarrow -20$
partir $\longrightarrow -20$
à $\longrightarrow 10$
point $\longrightarrow -20$

Loi de probabilité

$f(10) = P(X=10) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$f(20) = P(X=20) = \frac{1}{10}$

$f(-20) = P(X=-20) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Espérance mathématique :

$E(X) = \sum_i x_i p_i$, où $p_i = P(X=x_i)$

$= 10\cdot\frac{1}{2} + 20\cdot\frac{1}{10} + (-20)\cdot\frac{2}{5}$

$= 5 + 2 - 8 = -1 < 0$

Le jeu est défavorable au joueur.

Ecart-type

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$,

où $\underbrace{V(X)}_{\text{variance}} = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2$

$= \frac{1}{2}(10+1)^2 + \frac{1}{10}(20+1)^2 + \frac{2}{5}(-20+1)^2$

$= \frac{1}{2}\cdot 121 + \frac{1}{10}\cdot 441 + \frac{2}{5}\cdot 361$

$= 249$

$\sigma(X) = \sqrt{249} \simeq 15{,}78$

---

b) Le jeu est équilibré $\Leftrightarrow E(X) = 0$

$\Leftrightarrow 10\cdot\frac{1}{2} + 20\cdot\frac{1}{10} + x\cdot\frac{2}{5} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}x = -7 \Leftrightarrow x = -\frac{35}{2} = -17{,}5$

x = perte pour un mot contenant 2 voyelles

La perte devrait être de $-17{,}5$ points.

III) 1) a) $\Gamma : 4x^2+y^2+24x-4y+36=0$

$\Leftrightarrow 4(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)-4=0$

$\Leftrightarrow 4(x+3)^2+(y-2)^2=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+3)^2}{1}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1 \Leftrightarrow \dfrac{(y-2)^2}{4}+\dfrac{(x+3)^2}{1}=1$

Γ est une ellipse de centre $\Omega(-3,2)$.

$a^2=4$, $b^2=1$ $\Rightarrow c^2=a^2-b^2=3$

Donc $a=2$, $b=1$ et $c=\sqrt{3}$

Excentricité : $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

---

b) Posons $\begin{cases} X=x+3 \\ Y=y-2 \end{cases}$ système d'équations du changement de repères $(O,\vec{i},\vec{j})\to(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

Dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$:

$\Gamma : \dfrac{Y^2}{4}+\dfrac{X^2}{1}=1$

	Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$
axe focal Δ	$X=0$	$x=-3$
sommets sur l'axe focal	$S_1(0,a)=S_1(0,2)$ $S_2(0,-a)=S_2(0,-2)$	$S_1(-3,4)$ $S_2(-3,0)$
sommets sur l'axe non focal	$S_3(b,0)=S_3(1,0)$ $S_4(-b,0)=S_4(-1,0)$	$S_3(-2,2)$ $S_4(-4,2)$
foyers	$F_1(0,c)=F_1(0,\sqrt{3})$ $F_2(0,-c)=F_2(0,-\sqrt{3})$	$F_1(-3,2+\sqrt{3})$ $F_2(-3,2-\sqrt{3})$

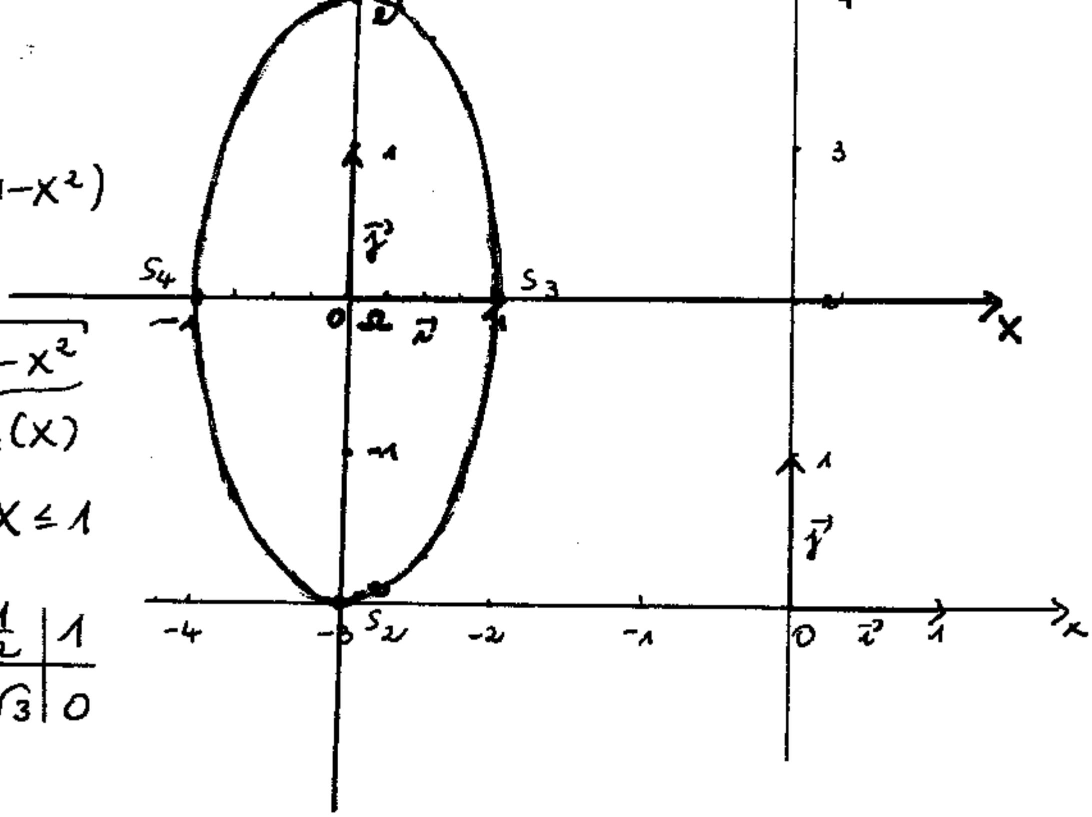
c)

$\Gamma : y^2 = 4(1-x^2)$

$\Leftrightarrow y = \pm \underbrace{2\sqrt{1-x^2}}_{f_1(x)}$

avec $-1 \leq x \leq 1$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f_1(x)$	2	$\sqrt{3}$	0



2) $\mathcal{H}$ est une hyperbole de centre $O(0,0)$.

L'une de ses directrices d a pour équation $\underbrace{x = \frac{32}{5}}_{(1)}$.

Donc (Ox) est l'axe focal de $\mathcal{H}$ et

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

L'une de ses asymptotes obliques a pour équation

$y = -\frac{3}{4}x$ (2).

(1) et (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{c} = \frac{32}{5} \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \end{cases}$ avec $c^2 = a^2 + b^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{32}{5}c \\ b^2 = \frac{9}{16}a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{32}{5}c \quad (3) \\ b^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{32}{5}c = \frac{18}{5}c \quad (4) \end{cases}$$

(3) et (4) dans $c^2 = a^2 + b^2$: $\quad c^2 = \frac{32}{5}c + \frac{18}{5}c = \frac{50}{5}c = 10c$

$\Leftrightarrow c = 10$

(3) : $a^2 = \frac{32}{5} \cdot 10 = 64 \Leftrightarrow a = 8$

(4) : $b^2 = \frac{18}{5} \cdot 10 = 36 \Leftrightarrow b = 6$

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

---

3) $\mathcal{C} : y = 4 - \sqrt{4x-8} \Leftrightarrow \sqrt{4x-8} = 4 - y$ CE : $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 4x - 8 = (4-y)^2$

$\Leftrightarrow (y-4)^2 = 4(x-2)$ équation cartésienne d'une demi-parabole de sommet $S(2,4)$ et de paramètre $p = 2$

$T \perp d \Leftrightarrow T : y = -2x + \lambda$

T est tangente à $\mathcal{C}$

$\Leftrightarrow$ le système $\begin{cases} y = -2x + \lambda & (1) \\ (y-4)^2 = 4(x-2) & (2) \end{cases}$ avec $x \geq 2$ et $y \leq 4$ admet une solution unique

$(1) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y + \frac{\lambda}{2}$ $(1')$

$(1')$ dans (2) : $(y-4)^2 = 4\left(-\frac{1}{2}y + \frac{\lambda}{2} - 2\right)$

$\Leftrightarrow y^2 - 8y + 16 = -2y + 2\lambda - 8$

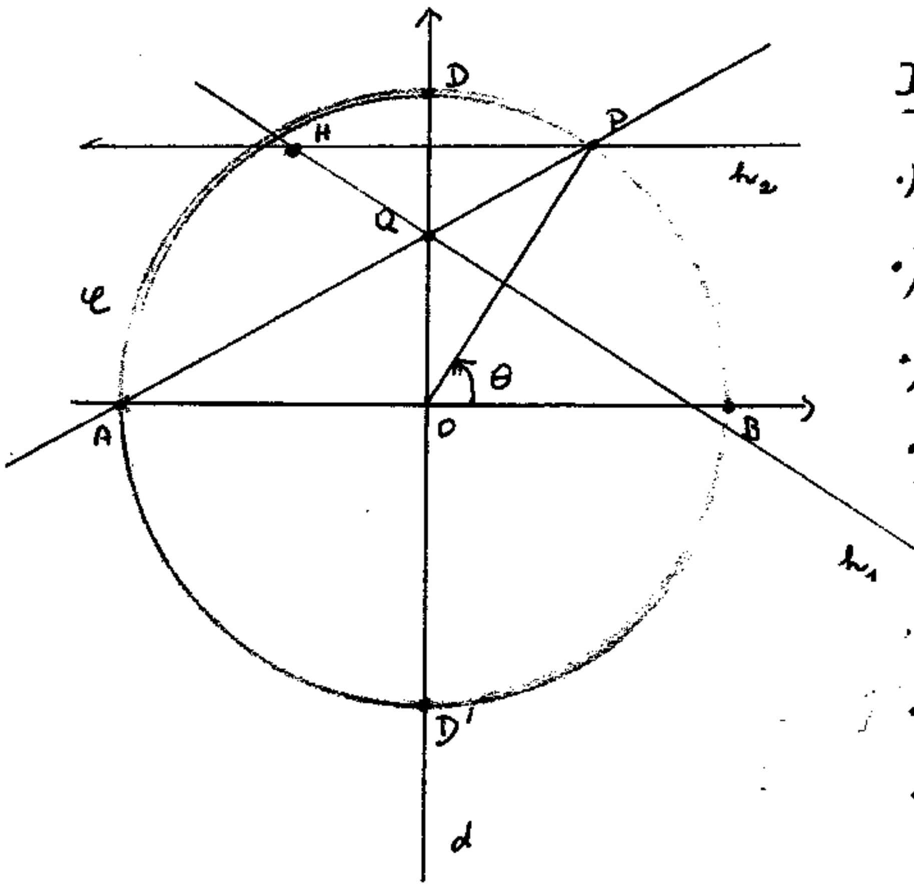
$\Leftrightarrow y^2 - 6y + (24 - 2\lambda) = 0$ $\quad \Delta' = 9 - (24 - 2\lambda) = -15 + 2\lambda$

$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ admet une solution unique $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{15}{2}$

Ainsi $T : y = -2x + \frac{15}{2}$

L'ordonnée du point de contact de T avec $\mathcal{C}$ est la solution de l'équation $(E_{\frac{15}{2}})$: $y_0 = 3$

Dans $(1')$: $x_0 = -\frac{3}{2} + \frac{15}{4} = \frac{9}{4}$. $T \cap \mathcal{C} = \left\{ M_0\left(\frac{9}{4}, 3\right) \right\}$



Données

-) 2 points fixes A et B, $A \neq B$
-) $\mathscr{C}$ = cercle de diamètre $[AB]$
-) O = centre du cercle $\mathscr{C}$
-) d = droite passant par O et perpendiculaire à (AB)
-) P = point mobile de $\mathscr{C}$
-) $\{Q\} = (AP) \cap d$
-) $\Delta\, OPQ$

Lieu

$L = \{ H \in \pi \mid H \text{ est l'orthocentre du } \Delta\, OPQ \}$

$= \{ H \in \pi \mid \{H\} = h_1 \cap h_2 \}$, où h_1 est la hauteur passant par Q et h_2 la hauteur passant par P.

Choix d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

-) O = centre de $\mathscr{C}$ $\Rightarrow O(0,0)$
-) $B(1,0) \Rightarrow \vec{\imath} = \overrightarrow{OB}$ $(\vec{\jmath} = \overrightarrow{OD})$

Equation cartésienne du lieu

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a

-) $A(-1,0)$, $P(\cos\theta, \sin\theta)$, où $\theta = \measuredangle_o(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP})$

•) <u>Coordonnées de Q</u>

$Q(x_Q, y_Q) \in d = (AD)$, donc $x_Q = 0$.

$Q(0, y_Q) \in (AP)$, donc $\det(\vec{AQ}, \vec{AP}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta + 1 \\ y_Q & \sin\theta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta - y_Q(\cos\theta + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y_Q(\cos\theta + 1) = \sin\theta$$

Vu que $P \neq A$, car (AP) est une droite, on a $\theta \neq \pi\,(2\pi)$, donc $\cos\theta + 1 \neq 0$. Ainsi $y_Q = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}$.

$$\underline{\underline{Q\left(0, \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1}\right)}}$$

•) <u>Equation cartésienne de h_1 : 1ière génératrice du lieu</u>

$X(x, y) \in h_1 \Leftrightarrow \vec{QX} \perp \vec{OP} \Leftrightarrow \vec{QX} \cdot \vec{OP} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y - \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta \cdot x + \sin\theta\, y - \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta + 1} = 0$$

$\left[\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = (1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta) \right.$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y + (\cos\theta - 1) = 0}}$$

•) <u>Equation cartésienne de h_2 : 2e génératrice du lieu</u>

$h_2 \parallel (AB)$ et $P \in h_2$. Donc $\underline{\underline{h_2 : y = \sin\theta}}$.

•) <u>Coordonnées de H</u>

$$H(x, y) \in h_1 \cap h_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y + (\cos\theta - 1) = 0 & (1) \\ y = \sin\theta & (2) \end{cases}$$

(2) dans (1) :

$$\cos\theta \cdot x + \sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta \cdot x - \cos^2\theta + \cos\theta = 0 \quad (3)$$

Vu que $P \neq D$ (sinon $Q = D$ et OPQ n'est pas un triangle) et que $P \neq D'$ (sinon $Q = D'$ et id), $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} (\pi)$,

$\cos\theta \neq 0$.

$$(3) \Leftrightarrow x - \cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \cos\theta - 1$$

$$\underline{H(\cos\theta - 1, \sin\theta)}$$

Remarquer que $P \neq B$, car sinon $Q = O$ et OPQ n'est pas un triangle.

•) <u>Equation cartésienne de L</u>

$$H(x,y) \in L \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\theta - 1 \\ y = \sin\theta \end{cases}, \ \theta \in \mathbb{R} - \{k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$ éq. cartésienne du cercle $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A, 1)$

$\theta \equiv 0 (2\pi) \Leftrightarrow x = y = 0$
$\Rightarrow$ p^t $O(0,0)$

$\theta \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \Leftrightarrow x = -1$ et $y = 1$
$\Rightarrow$ p^t $E(-1, 1)$

$\theta \equiv \pi (2\pi) \Leftrightarrow x = -2$ et $y = 0$
$\Rightarrow$ p^t $F(-2, 0)$

$\theta \equiv \frac{3\pi}{2} (2\pi) \Leftrightarrow x = -1$ et $y = -1$
$\Rightarrow$ p^t $G(-1, -1)$

$L = \mathcal{C}_1 - \{O, E, F, G\}$