Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2015

Section: B

Branche: Mathématiques I

Numéro d'ordre du candidat

1 5 SEP. 2015

I 1) Soit le polynôme à coefficients et variable complexes $P_\alpha(z)=z^3+(-3+\alpha)\cdot z^2+2\overline{\alpha}\cdot z+i\cdot|\alpha|^2$.

a) Calculer les valeurs du coefficient complexe α sachant que $z_0=-i$ est une racine de $P_\alpha(z)$.

b) Parmi les valeurs de α trouvées sous 1)a), déterminer celle qui vérifie la condition :
le reste dans la division de $P_\alpha(z)$ par $z+1$ est $-5+5i$.

c) Résoudre l'équation $P_\alpha(z)=0$ pour la valeur de α déterminée sous 1)b).

d) Soient z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation $P_\alpha(z)=0$ calculées sous 1)c).
Choisir z_1 et z_2 tels que $\mathrm{Im}(z_1)>\mathrm{Im}(z_2)$. Reporter les points $A(z_0)$, $B(z_2)$ et $C(z_1)$ dans le plan de Gauss et calculer une valeur de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$, où $O(0)$.

e) Montrer que C est l'image de A dans la composée d'une rotation et d'une homothétie.

2) Soient les nombres complexes $z=x+yi$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $Z=z-\dfrac{1}{z}$.

a) Ecrire Z sous sa forme algébrique.

b) Déterminer l'ensemble $E=\left\{M(z)/\,Z\in i\mathbb{R}\right\}$.

(12+3=15 points)

II 1) Soient m et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Calculer $p\in\mathbb{N}$ tel que $C_m^2+m\cdot n+C_n^2=C_p^2$.

2) Le code d'ouverture d'un coffre est composé dans l'ordre de trois lettres choisies parmi les lettres A, B et C, suivies de 5 chiffres distincts de l'ensemble $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

a) Combien de codes peut-on définir ?
b) Combien de ces codes comportent au moins deux fois la lettre A et les deux chiffres 1 et 6 ?

3) Chacun des dix mots de la phrase « rien ne sert de courir, il faut partir à point » est inscrit sur un carton. On suppose les cartons indiscernables au toucher. On tire ensuite au hasard un carton.
Si le mot inscrit sur le carton contient une voyelle, on gagne 10 points ; s'il contient deux voyelles, on perd 20 points ; s'il contient trois voyelles, on gagne 20 points.

a) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de points obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance et son écart type.

b) Sans changer les gains obtenus pour les mots contenant une ou trois voyelles, quelle devrait être la perte pour un mot contenant deux voyelles afin d'obtenir un jeu équilibré.

(3+5+7=15 points)

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2015

Section: B

Branche: Mathématiques I

Numéro d'ordre du candidat

____

III *Le plan cartésien est muni d'un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Soit la courbe Γ définie par l'équation $4x^2+y^2+24x-4y+36=0$.
   a) Déterminer la nature, le centre Ω et l'excentricité de Γ.
   b) Donner dans les repères $\left(\Omega,\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ une équation de l'axe focal, ainsi que les coordonnées des sommets et des foyers de Γ.
   c) Représenter Γ.

2) Une hyperbole $\mathcal{H}$ de centre O a une directrice d'équation $x=\frac{32}{5}$ et une asymptote oblique d'équation $y=-\frac{3}{4}x$. Etablir l'équation cartésienne réduite de $\mathcal{H}$.

3) Etablir une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$: $y=4-\sqrt{4x-8}$ perpendiculaire à la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x$. Calculer les coordonnées de son point de contact.

(7+4+4=15 points)

IV Soient A et B deux points fixes distincts du plan π. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[A,B]$. Soit P un point variable de $\mathcal{C}$. Soit Q le point d'intersection de la droite (AP) avec la perpendiculaire à (AB) passant par le centre O du cercle.

Calculer une équation cartésienne du lieu L des orthocentres des triangles OPQ.

Préciser la nature géométrique de L et représenter L.

(15 points)