math. B1

I

1) $P(z) = z^3 - \alpha z^2 - \beta z - 24i$

$P(-2i)=0 \Leftrightarrow 8i + 4\alpha + 2i\beta - 24i = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 2i\beta = 16i \Leftrightarrow 2\alpha + i\beta = 8i$

$P(-\sqrt{3}) = -5\sqrt{3} - 18i \Leftrightarrow -3\sqrt{3} - 3\alpha + \sqrt{3}\beta - 24i = -5\sqrt{3} - 18i \Leftrightarrow -3\alpha + \sqrt{3}\beta = 6i - 2\sqrt{3}$

$$\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha + i\beta = 8i & \cdot 3 \\ -3\alpha + \sqrt{3}\beta = 6i - 2\sqrt{3} & \cdot 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6\alpha + 3i\beta = 24i \\ -6\alpha + 2\sqrt{3}\beta = 12i - 4\sqrt{3} \end{cases} \Big| (+)$$

$$(2\sqrt{3} + 3i)\beta = 36i - 4\sqrt{3}$$

$$\beta = \frac{36i - 4\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3i} = \frac{72\sqrt{3}i + 108 - 24 + 12\sqrt{3}i}{12 + 9}$$

$$\beta = \frac{84 + 84\sqrt{3}i}{21}$$

$$\beta = 4 + 4\sqrt{3}i$$

dans ① $\alpha = \dfrac{8i - 4i + 4\sqrt{3}}{2}$ $\quad \alpha = 2\sqrt{3} + 2i$

$P(z) = z^3 - (2\sqrt{3} + 2i)z^2 - (4 + 4\sqrt{3}i)z - 24i$

2) $z_0 = -2i$ est solution, donc $P(z) = (z + 2i) \cdot Q(z)$

	1	$-2\sqrt{3} - 2i$	$-4 - 4\sqrt{3}i$	$-24i$
$-2i$		$-2i$	$4\sqrt{3}i - 8$	$24i$
	1	$-2\sqrt{3} - 4i$	-12	0

$Q(z) = z^2 - (2\sqrt{3} + 4i)z - 12$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\sqrt{3} + 4i)^2 + 4 \cdot 12 \\ &= 12 - 16 + 16\sqrt{3}i + 48 \\ &= 44 + 16\sqrt{3} \\ &= 4(11 + 4\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \sqrt{121 + 48} = 13 \\ a^2 - b^2 = 11 \\ 2ab = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$2a^2 = 24 \quad a = \pm 2\sqrt{3}$ $\quad 2b^2 = 2 \quad b = \pm 1$

racines de $Q(z)$: $z_{1/2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 4i \pm 2(2\sqrt{3} + i)}{2}$

$$\begin{cases} z_1 = 3\sqrt{3} + 3i \\ z_2 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$$

$$S = \{-2i \,;\, 3\sqrt{3} + 3i \,;\, -\sqrt{3} + i\}$$

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3\sqrt{3} + 3i}{-\sqrt{3} + i} = \dfrac{6 \operatorname{cis}\frac{\pi}{6}}{3 \operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}} = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_1 = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) z_2$

$A_1 = (r \circ h)(A_2)$

avec $\begin{cases} r = \operatorname{rot}\left(O; -\frac{2\pi}{3}\right) \\ h = \operatorname{hom}(O; 2) \end{cases}$

ou $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{1}{2} \operatorname{cis}\dfrac{2\pi}{3}$

$A_2 = (h \circ r)(A_1)$

avec $\begin{cases} h = \operatorname{hom}\left(O; \frac{1}{2}\right) \\ r = \operatorname{rot}\left(O; \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$

II ① dé trois fois ... cas possibles : $6^3 = 216$

- $3\times$ m̂ nombre : cas favorables : 6
- exact. $2\times$ m̂ nombre : c.f. : $\underbrace{C_6^1}_{\text{choix du double}} \cdot \underbrace{C_5^1}_{\text{choix du simple}} \cdot \underbrace{\frac{3!}{2!}}_{\text{ordre}} = 90$
- autres cas : c.f. $216 - 6 - 90 = 120$ [ou bien : 3 nombres diff. : $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$]

X : gain

x_i : -6 ; 9 ; 15

$p(X=-6) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$

$p(X=9) = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$

$p(X=15) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

loi de prob.

x_i	-6	9	15
p_i	$\frac{20}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{1}{36}$

Espérance de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = \frac{-120 + 135 + 15}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

Variance de X : $V(X) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i = \left(\frac{-41}{6}\right)^2 \cdot \frac{20}{36} + \left(\frac{49}{6}\right)^2 \cdot \frac{15}{36} + \left(\frac{85}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{36}$

$= \frac{76\,860}{36 \cdot 36}$

$= \frac{2135}{36} \quad (\simeq 59,31)$

Ecart-type de X : $\sigma(X) = \frac{\sqrt{2135}}{6} \quad (\simeq 7,70)$

② Bernoulli : lancer le dé avec $\begin{cases} \text{succès : } 6 \\ \text{échec : } 1;2;3;4;5 \end{cases}$

$p = \frac{1}{6} \quad q = 1 - p = \frac{5}{6}$

répéter n fois ; X : nombre de succès

$p(X=i) = C_n^i \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$

$p(X \geq 1) > \frac{995}{1000}$

$1 - p(X=0) > \frac{995}{1000}$

$p(X=0) < \frac{5}{1000}$

$C_n^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{200}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{200}$

$n \ln \frac{5}{6} < \ln \frac{1}{200}$

$n > \frac{\ln \frac{1}{200}}{\ln \frac{5}{6}}$

$n > 29,06$

On doit lancer le dé au moins 30 fois.

III ① $\mathcal{E} \equiv 25x^2 - 36y^2 - 50x - 108y + 169 = 0$

$$25\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) - 36\left(y^2 + 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 169 = 0$$

$$25(x-1)^2 - 36\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - 25 + 81 + 169 = 0$$

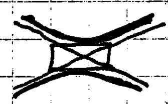
$$25(x-1)^2 - 36\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = -225$$

CHR $(O\vec{i}\vec{j}) \to (\Omega\vec{i}\vec{j})$

$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + \frac{3}{2} \end{cases}$ $\quad \Omega\left(1; -\frac{3}{2}\right)$

$$25X^2 - 36Y^2 = -225$$

$$\boxed{-\frac{X^2}{9} + \frac{4Y^2}{25} = 1}$$ Hyperbole

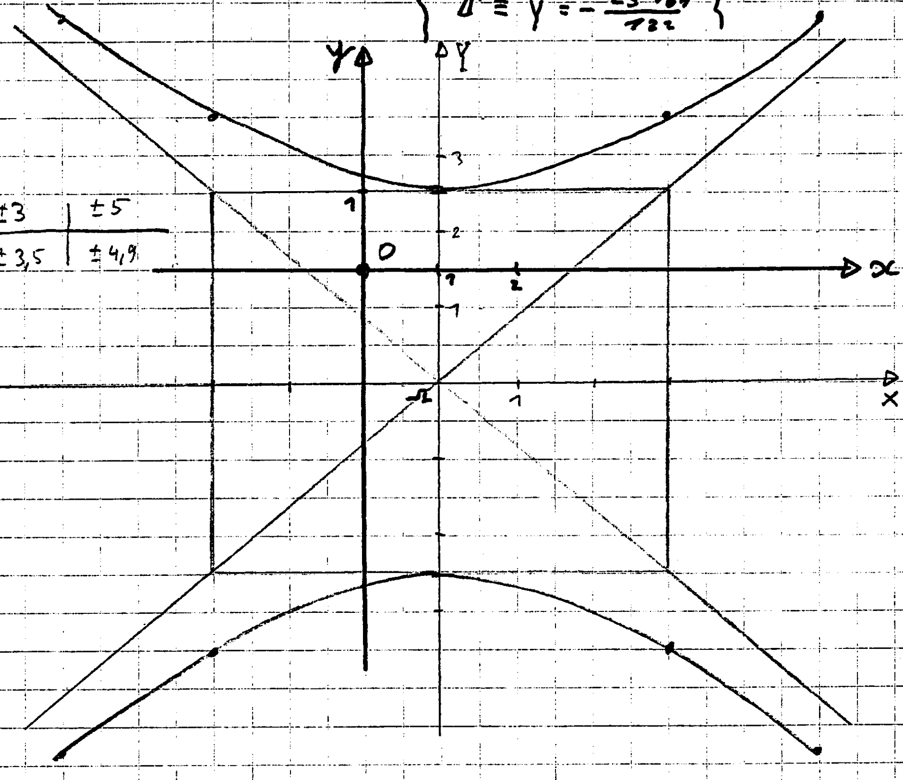


$a = 3$

$b = \frac{5}{2}$ $\quad c^2 = 9 + \frac{25}{4} = \frac{61}{4}$

$c = \frac{\sqrt{61}}{2}$ $\quad$ excentricité : $e = \frac{c}{b}$ $\quad e = \frac{\sqrt{61}}{5}$

	$(\Omega\vec{i}\vec{j})$	$(O\vec{i}\vec{j})$
Foyers	$F\left(0; \frac{\sqrt{61}}{2}\right)$, $F'\left(0; -\frac{\sqrt{61}}{2}\right)$	$F\left(1; \frac{\sqrt{61}-3}{2}\right)$ $\quad F'\left(1; \frac{-\sqrt{61}-3}{2}\right)$
directrices	$\Delta \equiv Y = \frac{25\sqrt{61}}{122}$, $\Delta' \equiv Y = -\frac{25\sqrt{61}}{122}$	$\Delta \equiv y = \frac{25\sqrt{61} - 183}{122}$ $\quad \Delta' \equiv y = \frac{-25\sqrt{61} - 183}{122}$



x	± 3	± 5
y	$\pm 3{,}5$	$\pm 4{,}9$

② T par l'origine : $y = mx$

$T \cap \mathcal{E}$: $25x^2 - 36m^2x^2 - 50x - 108mx + 169 = 0$

$$(25 - 36m^2)x^2 - (50 + 108m)x + 169 = 0$$

Cond : $m \neq \pm\frac{5}{6}$ et $\Delta = 0$

$$(50 + 108m)^2 - 4 \cdot 169(25 - 36m^2) = 0$$

$$2500 + 10800m + 108^2m^2 - 16900 + 4 \cdot 169 \cdot 36m^2 = 0$$

$$36000m^2 + 10800m - 14400 = 0 \quad | : 3600$$

$$10m^2 + 3m - 4 = 0$$

$\delta = 9 + 4 \cdot 40 = 169$

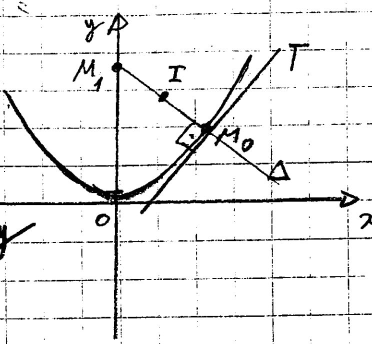
$m_{1/2} = \frac{-3 \pm 13}{20} \to m_1 = \frac{1}{2}$, $\; m_2 = -\frac{4}{5}$

$T_1 \equiv y = \frac{x}{2}$

$T_2 \equiv y = -\frac{4x}{5}$

IV

schéma



$P \equiv x^2 = 4y$

$M_0(x_0 ; y_0)$ avec $y_0 = \frac{x_0^2}{4}$ $\boxed{\text{paramètre } x_0}$

$T \equiv x_0 x = 2(y + y_0)$

pente de T : $m = \frac{x_0}{2}$

pente de Δ : $-\frac{2}{x_0}$ cond : $\boxed{x_0 \neq 0}$

Eq. de Δ : $y - y_0 = -\frac{2}{x_0}(x - x_0)$

$$y - y_0 = -\frac{2x}{x_0} + 2$$

$$y = -\frac{2x}{x_0} + 2 + y_0$$

$$y = \frac{-2x}{x_0} + 2 + \frac{x_0^2}{4}$$

$$M_1 \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = \frac{x_0^2}{4} + 2 \end{cases}$$

$$I \begin{cases} x = \frac{0 + x_0}{2} = \frac{x_0}{2} \\ y = \left(\frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0^2}{4} + 2\right) \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{x_0}{2} \\ y = \frac{x_0^2}{4} + 1 \end{cases}$$

Cond. $\boxed{x_0 \neq 0}$

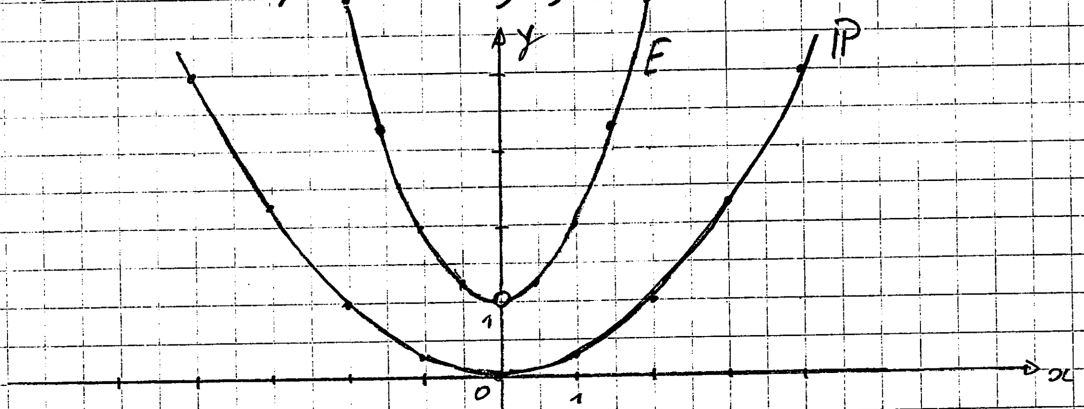
Eliminons x_0 :

$$y = x^2 + 1$$

$$x^2 = y - 1 \qquad \text{CHR} \begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases} \qquad \Omega(0 ; 1)$$

$$X^2 = Y$$

E est la parabole de sommet $\Omega(0 ; 1)$ et de paramètre $\frac{1}{2}$ démunie du point $\Omega(0 ; 1)$.



P

x	0	±1	±2	±4
y	0	0,25	1	4

E

x	±1	±2	±1,5	±0,5
y	2	5	3,25	1,25

[$x_0 = 0$ T : axe des x
Δ : axe des y
Δ et (Oy) ne sont pas sécantes]