Mathématiques 1 - Corrigé

I **1)** $P(z) = z^3 - 7iz^2 + (i-15)z + 4 + 12i$

Soit $b \in \mathbb{R}$; $P(bi) = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow -b + 4 + (-b^3 + 7b^2 - 15b + 12)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b + 4 = 0 \\ -b^3 + 7b^2 - 15b + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b = 4$$

$P(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; (z - 4i)(z^2 - 3iz - 3 + i) = 0$

$\Leftrightarrow\; z = 4i \text{ ou } z^2 - 3iz - 3 + i = 0 \qquad \Delta = ... = 3 - 4i = (2-i)^2$

$\Leftrightarrow\; z = 4i \text{ ou } z = 1 + i \text{ ou } z = -1 + 2i$

$A(4i)$, $B(1+i)$, $C(-1+2i)$

$\overline{AB} = |1 + i - 4i| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$

$\overline{AC} = |-1 + 2i - 4i| = |-1 - 2i| = \sqrt{5}$

$\overline{BC} = |-1 + 2i - 1 - i| = |-2 + i| = \sqrt{5}$

$\overline{BC} = \overline{AC}$ et $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ $\Rightarrow$ le triangle ABC est isocèle et rectangle en C.

2) $$\frac{z_1{}^6}{z_2{}^5} = \frac{(\sqrt{6}cis(-\frac{3\pi}{4}))^6}{(2cis(-\frac{\pi}{6}))^5} = \frac{6^3 cis(-\frac{18\pi}{4})}{2^5 cis(-\frac{5\pi}{6})} = \tfrac{27}{4}cis(-\tfrac{9\pi}{2} + \tfrac{5\pi}{6}) = \tfrac{27}{4}cis(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{27}{4}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i) = \tfrac{27}{8} + \tfrac{27\sqrt{3}}{8}i$$

3) $$Z = \frac{x - yi + i}{i(x+yi)+2} = \frac{(x - yi + i)(2 - y - xi)}{(2 - y + xi)(2 - y - xi)} = \frac{2x - xy - x^2 i - 2yi + y^2 i - xy + 2i - yi + x}{(2-y)^2 + x^2}$$

$$= \frac{3x - 2xy}{(2-y)^2 + x^2} + \frac{-x^2 + y^2 - 3y + 2}{(2-y)^2 + x^2}i$$

a) $Z \in i\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \Re(Z) = 0$

$\Leftrightarrow\; 3x - 2xy = 0$

$\Leftrightarrow\; x(3 - 2y) = 0$

$\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ ou } y = \frac{3}{2}$

E est la réunion de l'axe Oy privé du point A($2i$) et de la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$.

b) $Z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \Im(Z) = 0$

$\Leftrightarrow\; -x^2 + y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow\; -x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = -2 + \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow\; -x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\; -4x^2 + 4(y - \frac{3}{2})^2 = 1$

$$\Leftrightarrow\; \underbrace{-\frac{X^2}{\frac{1}{4}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} = 1}_{\text{équation d'une hyperbole équilatère } \mathcal{H} \text{ de centre } \Omega(0\,;\,\frac{3}{2}) \text{ et d'axe focal O}y} \quad \text{où} \begin{cases} X = x \\ Y = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sommets dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $S_1\,(0\,;\,\frac{1}{2})$ et $S_2\,(0\,;\,-\frac{1}{2})$

Sommets dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $S_1\,(0\,;\,2)$ et $S_2\,(0\,;\,1)$

F est donc l'l'hyperbole $\mathcal{H}$ privée du sommet S_1.

II **1)** épreuve de Bernoulli : lancer un missile

S : « atteindre l'objectif » ; $p(S) = p = 0,3$; $q = 1 - p = 0,7$

X : nombre de missiles qui touchent l'OVNI.

X suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,3$ et n.

$$p(X \geq 1) > 0,9999 \Leftrightarrow p(X = 0) < 0,0001$$

$$\Leftrightarrow C_n^0 \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^n < 0,0001$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,0001}{\ln 0,7}$$

$$\Leftrightarrow n > 25,8...$$

Il faut lancer au moins 26 missiles.

2) a) $p(X = -1) = \dfrac{C_6^1 \cdot C_n^1}{C_{n+6}^2} = \dfrac{6n}{\frac{(n+6)(n+5)}{2}} = \dfrac{12n}{(n+6)(n+5)}$

$$p(X = 1) = 1 - \frac{12n}{(n+6)(n+5)} = \frac{n^2 + 11n + 30 - 12n}{(n+6)(n+5)} = \frac{n^2 - n + 30}{(n+6)(n+5)}$$

b) $E(X) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{12n}{(n+6)(n+5)} + \dfrac{n^2 - n + 30}{(n+6)(n+5)} = 0$

$$\Leftrightarrow n^2 - 13n + 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 3 \text{ ou } n = 10$$

c) $E(X) < 0 \Leftrightarrow n^2 - 13n + 30 < 0 \Leftrightarrow 3 < n < 10$

Ce jeu est défavorable au joueur si n prend une des valeurs de l'ensemble {4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.

3) Un événement élémentaire de l'univers Ω est une liste ordonnée contenant 3 garçons et 3 filles.

$\# \Omega = C_6^3 = 20$ (nombre de positions possibles pour les 3 filles par exemple)

a) A = {« les trois filles s'assoient côte à côte »} = {FFFGGG ; GFFFGG ; GGFFFG ; GGGFFF}

$\#A = 4$

$p(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

b) B = {« il y a alternativement un garçon et une fille »} = {FGFGFG ; GFGFGF}

$\#B = 2$

$p(B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

III 1) a) $9x^2+7y^2+36x-42y+36=0$

$\Leftrightarrow\ 9(x^2+4x+4)+7(y^2-6y+9)=-36+36+63$

$\Leftrightarrow\ 9(x+2)^2+7(y-3)^2=63$

$\Leftrightarrow\ \frac{(x+2)^2}{7}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

$\Leftrightarrow\ \frac{X^2}{7}+\frac{Y^2}{9}=1$ où $\begin{cases} X=x+2 \\ Y=y-3 \end{cases}$

Γ est une ellipse de centre Ω $(-2\ ;\ 3)$ et d'axe focal parallèle à l'axe Oy ;

$a=3$, $b=\sqrt{7}$ et $c=\sqrt{9-7}=\sqrt{2}$.

Excentricité : $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

	dans $(\Omega,\ \vec{i},\vec{j}\ )$	dans $(O,\ \vec{i},\vec{j}\ )$
Sommets :	$S_1(0\ ;\ 3)$, $S_2(0\ ;\ -3)$, $S_3(\sqrt{7}\ ;\ 0)$, $S_4(-\sqrt{7}\ ;\ 0)$	$S_1(-2\ ;\ 6)$, $S_2(-2\ ;\ 0)$, $S_3(-2+\sqrt{7}\ ;\ 3)$, $S_4(-2-\sqrt{7}\ ;\ 3)$
Axe focal:	$m\equiv X=0$	$m\equiv x=-2$
Foyers:	$F(0;\ \sqrt{2}\ )$, $F'(0;\ -\sqrt{2}\ )$	$F(-2;\ 3+\sqrt{2}\ )$, $F'(-2;\ 3-\sqrt{2}\ )$
Directrices:	$d\equiv Y=\frac{9\sqrt{2}}{2}$, $d'\equiv Y=-\frac{9\sqrt{2}}{2}$	$d\equiv y=\frac{6+9\sqrt{2}}{2}$, $d'\equiv x=\frac{6-9\sqrt{2}}{2}$

b) Soit t une tangente à Γ perpendiculaire à d.

$t\equiv y=x+k\ \ (k\in\mathbb{R})$

$\Gamma\cap t\equiv\begin{cases} 9x^2+7y^2+36x-42y+36=0 & (I) \\ y=x+k & (II) \end{cases}$

(II) dans (I) : $9x^2+7(x+k)^2+36x-42(x+k)+36=0$

$\Leftrightarrow\ 9x^2+7x^2+14kx+7k^2+36x-42x-42k+36=0$

$\Leftrightarrow\ 16x^2+(14k-6)x+7k^2-42k+36=0$ (E)

(E) admet une solution unique

$\Leftrightarrow\ \Delta=0$

$\Leftrightarrow\ (14k-6)^2-4\cdot 16\cdot(7k^2-42k+36)=0$

$\Leftrightarrow\ (7k-3)^2-16\cdot(7k^2-42k+36)=0$

$\Leftrightarrow\ 49k^2-42k+9-112k^2+672k-576=0$

$\Leftrightarrow\ -63k^2+630k-567=0$

$\Leftrightarrow\ k^2-10k+9=0$

$\Leftrightarrow\ k=1$ ou $k=9$

D'où les tangentes à Γ perpendiculaires à d : $t_1\equiv y=x+1$ et $t_2\equiv y=x+9$

2) $y=-2-\sqrt{2-2x}\ \Leftrightarrow\ y+2=-\sqrt{2-2x}$

C.E. : $2-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 1$

$y+2\leq 0\Leftrightarrow y\leq -2$

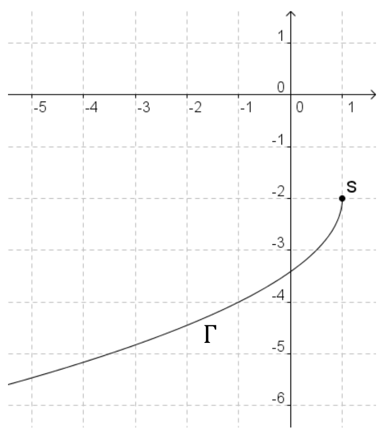
$\forall\, x\in\,]-\infty\ ;\ 1]$, $\forall\, y\in\ ]-\infty\ ;\ -2]$:

$y+2=-\sqrt{2-2x}\ \Leftrightarrow\ (y+2)^2=2-2x$

$\Leftrightarrow\ (y+2)^2=-2(x-1)$

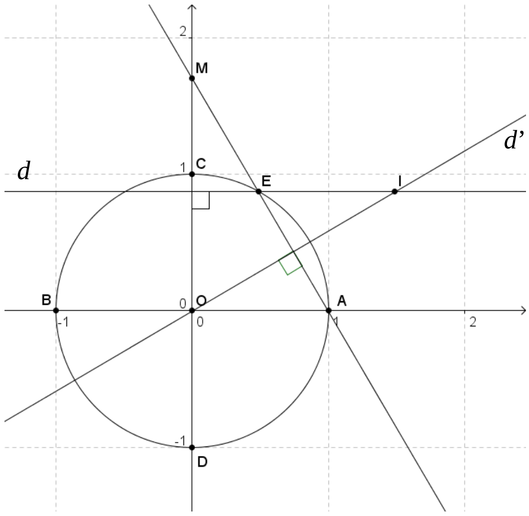
$\Leftrightarrow\ \underbrace{Y^2=-2X}$ où $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y+2 \end{cases}$

équation d'une parabole P
de sommet S(1 ; −2),
d'axe focal parallèle à Ox,
de paramètre 1.



Γ est la demi-parabole incluse dans P et située dans le demi-plan défini par l'inéquation $y\leq -2$.

IV



Dans le repère orthonormé $(O,\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$:

$O(0\ ;\ 0)$, $A(1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1)$, $M(0\ ;\ m)$ $(m \in \mathbb{R}^*)$

Équation de *AM :*

$AM \equiv y = ax + b$ $\qquad \left\| \begin{array}{l} a = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{m-0}{0-1} = -m \\ M(0\ ;\ m) \in AM \Leftrightarrow b = m \end{array} \right.$

$AM \equiv y = -mx + b$

$AM \equiv y = -mx + m$

Déterminons l'ordonnée du point *E* :

$$AM \cap \mathcal{C} \equiv \begin{cases} y = -mx + m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{m} y + 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) dans (2) : $(1 - \frac{1}{m} y)^2 + y^2 = 1$

$$\Leftrightarrow 1 - \tfrac{2}{m} y + \tfrac{1}{m^2} y^2 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow -2my + y^2 + m^2 y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+m^2)y^2 - 2my = 0$$

$$\Leftrightarrow y \cdot [\,(1+m^2)y - 2m\,] = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0\ \ (= y_A)\ \text{ou}\ \ y = \frac{2m}{1+m^2}\ (= y_E)$$

D'où l'équation de d : $d \equiv y = \dfrac{2m}{1+m^2}$

Or, équation de d' : $d' \equiv y = \dfrac{1}{m} x$ car $d' \perp AM$ et $O \in d'$.

$$d \cap d' \equiv \begin{cases} y = \dfrac{2m}{1+m^2} \\ y = \dfrac{1}{m} x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2m}{1+m^2} \\ x = my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+m^2)y = 2m \\ m = \dfrac{x}{y} \end{cases} \quad \text{car} \quad m \neq 0 \Leftrightarrow y = \frac{2m}{1+m^2} \neq 0$$

$$I(x\ ;\ y) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow (1 + \tfrac{x^2}{y^2})y = 2\tfrac{x}{y} \Leftrightarrow y^2 + x^2 = 2x \ \text{ et }\ y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \ \text{ et }\ y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x-1)^2 + y^2 = 1}_{\substack{\text{équation du cercle de} \\ \text{centre A(1; 0) et de rayon 1}}} \ \text{ et }\ y \neq 0$$

$\mathcal{L}$ est le cercle de centre A et de rayon 1 dépourvu des points $O(0\ ;\ 0)$ et $P(2\ ;\ 0)$.
