I $\quad P(z) = z^3 - \alpha z^2 + \beta z - 16i$

1) $\begin{cases} P(2i) = 0 \\ P(i) = -\sqrt{3}\cdot 3 - 8i \end{cases} \qquad \begin{cases} -8i + \alpha\cdot 4 + 2\beta i - 16i = 0 \\ -i + \alpha + \beta i - 16i = -3\sqrt{3} - 8i \end{cases}$

$(*)\begin{cases} 4\alpha + 2i\beta = 24i \\ \alpha + i\beta = -3\sqrt{3} + 9i \end{cases} \qquad \begin{cases} -2\alpha - i\beta = -12i \\ \alpha + i\beta = 9i - 3\sqrt{3} \end{cases} \Big| (+) \quad -\alpha = -3i - 3\sqrt{3}$

$\boxed{\alpha = 3\sqrt{3} + 3i}$ $(**)$

$(*)(**) \Rightarrow 3\sqrt{3} + 3i + i\beta = -3\sqrt{3} + 9i$

$i\beta = -6\sqrt{3} + 6i$

$\boxed{\beta = 6 + 6\sqrt{3}i}$ $\qquad \boxed{P(z) = z^3 - (3\sqrt{3} + 3i)z^2 + (6 + 6\sqrt{3}i)z - 16i}$

2) $P(z) = 0 \qquad P(z) = (z - z_0)\cdot Q(z)$ avec $z_0 = 2i$

$Q(z) = z^2 - (3\sqrt{3} + i)z + 8$

	1	$-3\sqrt{3} - 3i$	$6 + 6\sqrt{3}i$	$-16i$
$2i$		$2i$	$2 - 6\sqrt{3}i$	$16i$
	1	$-3\sqrt{3} - i$	8	0

Posons $Q(z) = 0 \qquad \Delta = 27 - 1 + 6\sqrt{3}i - 32$

$\Delta = -6 + 6\sqrt{3}i$

racines carrées de Δ : $\delta_{1/2} = \pm(a + bi)$

$\begin{cases} (1)\ a^2 + b^2 = \sqrt{36 + 36\cdot 3} = 6\cdot 2 = 12 \\ (2)\ a^2 - b^2 = -6 \\ 2ab = 6\sqrt{3} \rightarrow a \text{ et } b \text{ m̂ signe} \end{cases}$

$(1)+(2) : 2a^2 = 6, \ a = \pm\sqrt{3} \qquad (1)-(2) : 2b^2 = 18, \ b = \pm 3$

$\delta_{1/2} = \pm(\sqrt{3} + 3i)$

$z_1 = \dfrac{3\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + 3i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$

$z_2 = \dfrac{3\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - 3i}{2} = \sqrt{3} - i \qquad S = \{2i ; 2\sqrt{3} + 2i ; \sqrt{3} - i\}$

3) $z_1 = a z_2$ avec $a = r \operatorname{cis} \varphi$

$a = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 2i}{\sqrt{3} - i} = \dfrac{4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}}{2 \operatorname{cis} -\frac{\pi}{6}} = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$

$A_1 = f(A_2)$ où f est la composée d'une rotation de centre O (origine) et d'angle $\frac{\pi}{3}$ avec une homothétie de centre O et de rapport $k = 2$

$\left[A_2 = f(A_1) \quad R(O ; -\frac{\pi}{3}) \ ; \ H(O ; \frac{1}{2}) \right]$

II 1) $C_{n-3}^{3} + C_{n-4}^{2} = n$ Cond. $n \geq 6$

$$\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} + \frac{(n-4)(n-5)}{2} = n$$

$$(n-4)(n-5)(n-3+3) = 6n$$

$$n(n-4)(n-5) - 6n = 0$$

$$n(n^2-5n-4n+20-6) = 0$$

$$n(n^2-9n+14) = 0$$ $\Delta = 81-56 = 25$

$$n = 0 \text{ ou } n = \frac{9 \pm 5}{2}$$

$$n = 0 \text{ ou } n = 7 \text{ ou } n = 2$$

$$S = \{7\}$$

2) $*66*666*$ $C_8^3 \cdot 5^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{6} \cdot 125 = 7000$; $p = \frac{7000}{6^8} = 0{,}004$

3) $p = p(\text{garçon}) = \frac{7}{10}$ succès : garçon
$q = p(\text{fille}) = \frac{3}{10}$ échec : fille

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$$

$$= 1 - C_n^0 \left(\frac{7}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n > 0{,}995$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^n < 0{,}005$$

$$n \ln 0{,}3 < \ln 0{,}005$$

$$n > \frac{\ln 0{,}005}{\ln 0{,}3}$$

Madame doit mettre au moins 5 enfants au monde.

III 1) $F(-1;3)$ $F'(3;3)$

distance focale : 4
$c = 2$
$e = \frac{4}{5}$

$e = \frac{c}{a}$ donc $a = \frac{c}{e} = \frac{2\cdot 5}{4} = \frac{5}{2}$

$c^2 = a^2 - b^2$ donc $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$ $b = \frac{3}{2}$

éq. réduite : $\frac{4X^2}{25} + \frac{4Y^2}{9} = 1$ CHR $O'(1;3)$ $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 3 \end{cases}$

$$36X^2 + 100Y^2 = 225$$
$$36(x-1)^2 + 100(y-3)^2 = 225$$
$$36x^2 + 100y^2 - 72x - 600y + 711 = 0$$

2) $16x^2 - 9y^2 - 32x - 36y - 56 = 0$

$$16(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 4y) - 56 = 0$$
$$16(x^2 - 2x + 1 - 1) - 9(y^2 + 4y + 4 - 4) - 56 = 0$$
$$16(x-1)^2 - 9(y+2)^2 - 16 + 36 - 56 = 0$$
$$16X^2 - 9Y^2 = 36 \quad | : 36$$

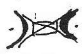
CHR : $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 2 \end{cases}$ $O'(1;-2)$

$$\boxed{\frac{4X^2}{9} - \frac{Y^2}{4} = 1}$$

$a = \frac{3}{2}$
$b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$ $c = \frac{5}{2}$

C'est une hyperbole



Foyers :

$(O', \vec{i}, \vec{j})$	$(O, \vec{i}, \vec{j})$
$F(-\frac{5}{2};0)$	$F(-\frac{3}{2};-2)$
$F'(\frac{5}{2};0)$	$F'(\frac{7}{2};-2)$

excentricité : $e = \frac{c}{a} = \frac{5\cdot 2}{2\cdot 3} = \frac{5}{3}$

tgtes par $O(0;0)$ $T \equiv y = ax$

$T \cap \mathcal{C}$: $\begin{cases} 16x^2 - 9y^2 - 32x - 36y - 56 = 0 \\ y = ax \end{cases}$

$$16x^2 - 9a^2x^2 - 32x - 36ax - 56 = 0$$
$$(16 - 9a^2)x^2 - 4(8 + 9a)x - 56 = 0$$

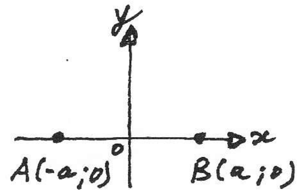
Cond. de tangence $\Delta = 0$ ($a \neq \pm \frac{4}{3}$)

$$16(8+9a)^2 + 4\cdot 56\cdot(16 - 9a^2) = 0 \quad | : 16$$
$$(8+9a)^2 + 14(16 - 9a^2) = 0$$
$$64 + 144a + 81a^2 + 224 - 126a^2 = 0$$

$$-45a^2 + 144a + 288 = 0 \quad | : (-9)$$
$$\boxed{5a^2 - 16a - 32 = 0}$$
$$\delta = 16^2 + 4\cdot 32\cdot 5$$
$$= 896$$
$$\sqrt{\delta} = 8\sqrt{14}$$
$$a_{1/2} = \frac{16 \pm 8\sqrt{14}}{10} = \frac{8 \pm 4\sqrt{14}}{5}$$

$$T_1 \equiv y = \frac{8 + 4\sqrt{14}}{5}x$$
$$T_2 \equiv y = \frac{8 - 4\sqrt{14}}{5}x$$

IV



$M(x;y)$

$\overline{AM}^2 = (x+a)^2 + y^2$

$\overline{BM}^2 = (x-a)^2 + y^2$

$M \in \mathcal{L} \iff 2\,\overline{MA}^2 = 3c\,\overline{MB}^2 \quad (c>0) \quad M \neq B$

$\iff 2(x+a)^2 + 2y^2 = 3c(x-a)^2 + 3cy^2$

$\iff (2-3c)x^2 + (2-3c)y^2 + (4a+6ac)x + 2a^2 - 3a^2c = 0$

$c = \frac{2}{3}$: $8ax = 0$

$x = 0$ $\mathcal{L}$ est l'axe des y

$\mathcal{L}$ est la médiatrice de $[AB]$

$c \neq \frac{2}{3}$ $x^2 + y^2 + \dfrac{2a(2+3c)}{2-3c}\,x + a^2 = 0$

Poser $\Omega\left(-\dfrac{a(2+3c)}{2-3c} \,;\, 0\right)$

$$r^2 = \frac{a^2(2+3c)^2}{(2-3c)^2} - a^2 = \frac{a^2\left[(2+3c)^2 - (2-3c)^2\right]}{(2-3c)^2}$$

$$= \frac{24a^2c}{(2-3c)^2}$$

$\mathcal{L}$ est le cercle de centre Ω et de rayon $r = \dfrac{2a\sqrt{6c}}{|2-3c|}$

[On vérifie que B n'appartient pas à $\mathcal{L}$]

$a = 3 \quad c = \frac{1}{6} \quad \Omega\left(-\dfrac{3(2+\frac{1}{2})}{2-\frac{1}{2}} \,;\, 0\right) = \Omega(-5\,;0)$

$r = \dfrac{6\sqrt{1}}{\frac{3}{2}} = 4$