

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2006

Section : B

Branche : MATHÉMATIQUES 1

Nom et prénom du candidat :

.....
.....

Question 1

(points 7 + 8)

1. Soit

$$P(z) = z^3 - (\lambda + 2 + i)z^2 + 2(\lambda + 1 + i)z - 2(\lambda + i) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1) Montrez que $\lambda + i$ est une racine de P .
 - 2) Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.
2. Dans le plan de Gauss on donne les points A d'affixe $z_A = 2$, B d'affixe $z_B = 2i$, C d'affixe $z_C = 2 + 2i\sqrt{3}$ et D d'affixe $z_D = -2\sqrt{3} + 2i$.
- 1) Calculez $\frac{z_C}{z_A}$ et $\frac{z_D}{z_B}$ donnez les résultats sous forme trigonométrique.
 - 2) Déduisez-en que le segment $[C, D]$ est l'image du segment $[A, B]$ par la composée $r \circ h$ d'une rotation r et d'une homothétie h desquelles on précisera les caractéristiques (centres, angle et rapport).
 - 3) Représentez A , B et $[A, B]$ dans le plan de Gauss et construisez C , D et $[C, D]$ à l'aide de h et r .

Question 2

(points 3 + 7 + 5)

1. Calculez le terme en x^{17} dans $(4x^2 - \frac{1}{8x})^{16}$ dans les mêmes conditions.
2. Un tireur à l'arc atteint une cible avec une probabilité de 0,25 et il tire 5 flèches.
 - 1) Calculez la probabilité pour qu'il atteigne la cible au moins une fois.
 - 2) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité de toucher la cible au moins une fois dépasse 90%.
3. Un joueur jette deux dés non truqués. Il gagne 5 € si les points des deux dés sont égaux sinon il perd 1 €. Il répète le lancer des deux dés deux fois. Soit X la variable aléatoire "gain du joueur".
 - 1) Déterminez la loi de probabilité de X .
 - 2) Calculez l'espérance mathématique pour conclure si ce jeu est équilibré, favorable ou défavorable au joueur.

..../.

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2006

Section : B

Branche : MATHÉMATIQUES 1

Nom et prénom du candidat :

.....
.....

Question 3

(points 6 + 9)

1. Soit la conique \mathcal{E} de foyer $F(1, 1)$, de directrice associée $d \equiv y - 13 = 0$ et d'excentricité $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - 1) Déterminez une équation focale et une équation réduite de \mathcal{E} .
 - 2) Après avoir précisé la nature de \mathcal{E} , déterminez la coordonnée de son second foyer F' et une équation de sa seconde directrice d' dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Soit la conique $\mathcal{P} \equiv y^2 = 4x$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - 1) Déterminez l'équation cartésienne explicite de la tangente t_M à \mathcal{P} au point $M(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ sachant que M n'est pas l'origine du repère.
 - 2) Déterminez la coordonnée du point A , point d'intersection de t_M avec l'axe des x .
 - 3) Déterminez la coordonnée du point B , point d'intersection de t_M avec l'axe des y et exprimez celle-ci uniquement en fonction de β (Rappel : $M(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}$).
 - 4) Déduisez-en la représentation graphique des tangentes aux points d'abscisses 1, 4 et 9 de la conique \mathcal{P} et complétez la figure par la courbe \mathcal{P} .

Question 4

(points 1 + 2 + 5 + 2 + 5)

On donne l'ensemble de points Γ par un système d'équations paramétriques :

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \frac{1}{\tan t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1. Déterminez la plus petite période commune aux fonctions x et y .
2. Déterminez un élément de symétrie de Γ .
3. On considère :

$$\Gamma_1 \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \frac{1}{\tan t} \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{et} \quad \Gamma_2 \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \frac{1}{\tan t} \end{cases} \quad t \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

Calculer les coordonnées des points $M(t)$ pour $t \in \left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right\}$ et représentez Γ_1 dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 3cm) en marquant le sens de parcours.

4. Complétez la figure précédente par Γ_2 avec indication du sens de parcours.
5. Éliminez le paramètre t pour obtenir une équation cartésienne de Γ et précisez la nature de Γ (La représentation de Γ n'est pas demandée).