Question 1

A) 1) Soit $z = x+iy$ avec $(x,y) \neq (4,3)$

$$Z = \frac{2i-z}{4+3i-z} = \frac{2i-x-iy}{4+3i-x-iy} = \frac{-x+i(2-y)}{(4-x)+i(3-y)} \cdot \frac{(4-x)-i(3-y)}{(4-x)-i(3-y)}$$

$$= \frac{-4x+x^2+6-2y-3y+y^2+i(3x-\cancel{xy}+8-2x-4y+\cancel{xy})}{(4-x)^2+(3-y)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+y^2-5y+6}{(x-4)^2+(y-3)^2} + i\,\frac{x-4y+8}{(x-4)^2+(y-3)^2}$$

2) $E = \{M \mid AMB = \text{triangle rectangle en } M\}$

• AMB = triangle $\Leftrightarrow M \neq A$ et $M \neq B$ donc $A \notin E$ et $B \notin E$

• Rem : D'après le théo du cercle de Thalès on voit tout de suite que E est le cercle de diamètre $[AB] \setminus \{A,B\}$, mais comme on doit déduire E de (1) il faut faire le calcul suivant :

$\Delta(AMB)$ rect. en $M \Leftrightarrow \widehat{AMB} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \arg \frac{z_B - z}{z_A - z} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $M(z)$

$\Leftrightarrow \frac{z_B - z}{z_A - z} = \frac{2i-z}{4+3i-z} = Z \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 5y + 6 = 0$ d'après (1)

$\Leftrightarrow x^2 - 2x\cdot 2 + 4 + y^2 - 2y\cdot\frac{5}{2} + \frac{25}{4} = -6 + 4 + \frac{25}{4}$

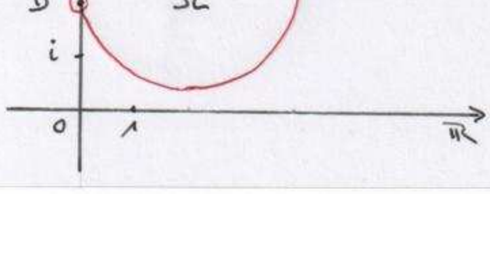
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$

éq. du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\left(2, \frac{5}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Or $(4-2)^2 + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ donc $A \in \mathcal{C}$

et $(0-2)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right) = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ donc $B \in \mathcal{C}$

donc $E = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$



B) 1) $Z = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 2+\sqrt{2} + 2i\sqrt{4-2} - (2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

$|Z| = \sqrt{8+8} = 4$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \cos\frac{\pi}{4}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}\end{array}\right\} \varphi = \frac{\pi}{4}$ d'où $\underline{Z = 4\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}}$

2) r.c.c. de Z : $Z_k = \sqrt{4}\,\mathrm{cis}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}$ $k = 0, 1$

$Z_0 = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{8}$

$Z_1 = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{9\pi}{8}$

et comme $\frac{\pi}{8} \in I$ ($\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{8} > 0$) on a $Z_0 = z_0$, d'où :

$2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} \iff \begin{cases}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$

3) $z_1 = \left(\sin\frac{9\pi}{32} - i\cos\frac{9\pi}{32}\right)^{-4}$

$= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{32}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{32}\right)\right)^{-4}$

$= \left(\cos\frac{7\pi}{32} - i\sin\frac{7\pi}{32}\right)^{-4}$

$= \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{32}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{32}\right)\right)^{-4}$

$= \left(\mathrm{cis}\left(-\frac{7\pi}{32}\right)\right)^{-4}$

$= \underline{\mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{8}}$ (f. trigon.)

$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$

$= -\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$

$= \underline{-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ (f. alg.)

<u>ou</u> : $z_1 = (-i)^{-4}\left(\cos\frac{9\pi}{32} + i\sin\frac{9\pi}{32}\right)^{-4}$

$= 1\cdot\left(\mathrm{cis}\,\frac{9\pi}{32}\right)^{-4}$

$= \mathrm{cis}\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$

$= \mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{8}$

(car $-\frac{9\pi}{8} + 2\pi = \frac{7\pi}{8}$)

Question 2

A) 1) $\Omega = \{$triplets d'entiers de 1 à 6$\}$, $\#\Omega = 6^3 = 216$

$X : \Omega \longrightarrow \{200, 30, 5, -10\}$

épreuve de Bernoulli : on jette un dé, succès : 6 ($p = \frac{1}{6}$), échec : pas de 6 ($q = \frac{5}{6}$)

p(k succès sur 3 épreuves) $= C_3^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$, d'où :

$p(X=200) = C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ | $p(X=5) = C_3^1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$

$p(X=30) = C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} = \frac{15}{216}$ | $p(X=-10) = C_3^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

2) $E(X) = 200\cdot\frac{1}{216} + 30\cdot\frac{15}{216} + 5\cdot\frac{75}{216} - 10\cdot\frac{125}{216} = -\frac{225}{216} < 0$

donc c'est un jeu défavorable au joueur qui perd "en moyenne" $\frac{225}{216} \simeq 1{,}04$ € par partie.

3) Soit x la perte si on n'obtient aucun 6 :

$E(X) = \frac{1025 - x\cdot 125}{216} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1025 \geqslant 125x \Leftrightarrow \underline{x \leq 8{,}2}$

Pour que le jeu ne soit pas défavorable il faut que la perte x soit inférieure ou égale à 8,2€.

B) | V1 V2 V3 V4 R1 R2 R3 B1 B2 |

on tire 3 boules, A : "obtenir 2 boules vertes"

1) tirages sans ordre et sans répétition : $\#A = C_4^2\cdot C_5^1 = \underline{\underline{30}}$

2) tirages avec ordre et avec répétition :

- $C_3^2 = 3$ poss. pour choisir les emplacements des 2 boules vertes
- une fois les emplacements choisis on a : $4^2\cdot 5 = 80$ poss.
- d'où $\#A = 3\cdot 80 = \underline{\underline{240}}$

3) tirages avec ordre et sans répétition :

- $C_3^2 = 3$ poss. pour placer les b. vertes
- une fois les emplacements choisis on a : $4\cdot 3\cdot 5 = 60$ poss.
- d'où $\#A = 3\cdot 60 = \underline{\underline{180}}$

Question 3

A) $M(x,y) \in \Gamma$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1) + y^2 + 4y + 4 = 4$

$\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \quad |:4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

posons $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y+2 \\ \Omega(1,-2) \end{cases}$ (4)

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$: $M(X,Y) \in \Gamma \Leftrightarrow X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$

Γ = ellipse de centre Ω, d'axe focal ΩY, $a=2$, $b=1$,

$b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow 1 = 4 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = 3 \Leftrightarrow c = \sqrt{3}$

Sommets : $S_1(0,2)$, $S_2(0,-2)$, $S_3(1,0)$, $S_4(-1,0)$

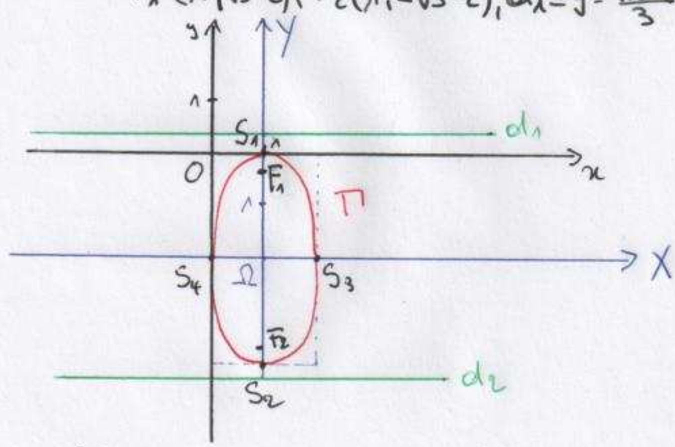
foyers et directrices : $F_1(0,\sqrt{3})$, $d_1 \equiv Y = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(= \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

$F_2(0,-\sqrt{3})$, $d_2 \equiv -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

excentricité : $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $S_1(1,0)$, $S_2(1,-4)$, $S_3(2,-2)$, $S_4(0,-2)$

$F_1(1, \sqrt{3}-2)$, $F_2(1, -\sqrt{3}-2)$, $d_1 \equiv y = \frac{4\sqrt{3}-6}{3}$, $d_2 \equiv y = \frac{-4\sqrt{3}-6}{3}$



2) $y = \sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow Y = \sqrt{2}$

$A(X,\sqrt{2}) \in \Gamma \Leftrightarrow X^2 + \frac{2}{4} = 1 \Leftrightarrow X^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow X = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

- tangente t_1 au point $A_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \equiv \frac{\sqrt{2}}{2} X + \frac{\sqrt{2}\,Y}{4} = 1 \quad \Big| \cdot \frac{4}{\sqrt{2}}$

$t_1 \equiv Y = -\frac{\cancel{4}^{2}\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}\cancel{2}} X + \frac{4}{\sqrt{2}} \equiv \underline{Y = -2X + 2\sqrt{2}}$

- tangente t_2 au point $A_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) \equiv -\frac{\sqrt{2}}{2} X + \frac{\sqrt{2}\,Y}{4} = 1$

$t_2 \equiv \underline{Y = 2X + 2\sqrt{2}}$,

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $t_1 \equiv y+2 = -2(x-1) + 2\sqrt{2} \equiv \underline{y = -2x + 2\sqrt{2}}$, $A_1\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}-2\right)$

$t_2 \equiv y+2 = 2(x-1) + 2\sqrt{2} \equiv \underline{y = 2x - 4 + 2\sqrt{2}}$, $A_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}-2\right)$

B) $M(x,y) \in \mathcal{T} \iff y^2+2y-3x+1=0$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\iff (y+1)^2 = 3x$

posons $\begin{cases} X = x \\ Y = y+1 \\ \Omega(0,-1) \end{cases}$

Dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $M(X,Y) \in \mathcal{T} \iff Y^2 = 3X$

$\mathcal{T}$ = parabole de sommet Ω, d'axe focal ΩX et de paramètre $p = \frac{3}{2}$

$d \equiv 2X + Y - 1 = 0 \equiv Y = -2X+1$

Soit t la tangente à $\mathcal{T}$ au point $A(X_0,Y_0) \in \mathcal{T}$:

$t \equiv Y_0 Y = \frac{3}{2}X + \frac{3}{2}X_0$

On peut supposer $A \neq \Omega$ (donc $Y_0 \neq 0$) car sinon $t = \Omega Y$ et t ne serait pas perpendiculaire à d, d'où :

$t \equiv Y = \frac{3}{2Y_0}X + \frac{3X_0}{2Y_0}$

$t \perp d \iff \frac{3}{2Y_0} = \frac{1}{2} \iff \underline{Y_0 = 3}$

et comme $A \in \mathcal{T}$: $3^2 = 3X_0 \iff \underline{X_0 = 3}$

Ainsi $A(3,3)$ est le seul point de $\mathcal{T}$ ayant une tangente $t \perp d$: $t \equiv Y = \frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$

Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$: $\underline{A(3,2)}$, et $t \equiv y+1 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \equiv \underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

Question 4

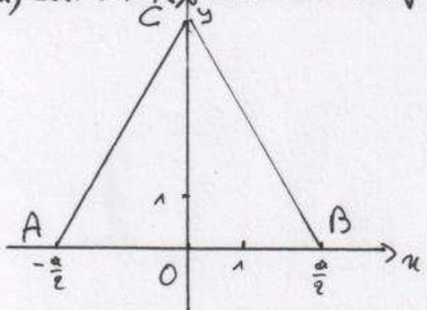
A) $\begin{cases} x = \tan t & (1) \\ y = \cos 2t + 1 & (2) \end{cases}$

- $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} x = +\infty$ et $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^+} x = -\infty$ et x continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, donc $x \in \mathbb{R}$
- $(2) \iff y - 1 = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}$

$(1) \to (2)$: $y - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2} \iff y = \frac{1-x^2}{1+x^2} + 1 \iff y = \frac{1-\cancel{x^2}+1+\cancel{x^2}}{1+x^2}$

D'où : $\underline{y = \frac{2}{1+x^2} \text{ avec } x \in \mathbb{R}}$

B) 1) Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ le R.O.N. tel que $A(-\frac{a}{2},0)$ et $B(\frac{a}{2},0)$:



$\Delta(OBC)$ rect. en O, d'où :

$\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{BC}^2$

$\frac{a^2}{4}+\overline{OC}^2=a^2$

$\Leftrightarrow \overline{OC}^2=\frac{3}{4}a^2$

$\Leftrightarrow \overline{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

D'où $C(0,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$

$E_k=\{M(x,y)\mid \overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=k\}$ avec $k\in\mathbb{R}^*_+$

$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=k$

$\Leftrightarrow (x+\frac{a}{2})^2+y^2+(x-\frac{a}{2})^2+y^2+x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2=k$

$\Leftrightarrow x^2+\cancel{ax}+\frac{a^2}{4}+y^2+x^2-\cancel{ax}+\frac{a^2}{4}+y^2+x^2+y^2-\sqrt{3}ay+\frac{3}{4}a^2=k$

$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-\sqrt{3}ay+\frac{5}{4}a^2=k \quad |:3$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2\cdot y\frac{\sqrt{3}}{6}a+\frac{\cancel{3}a^2}{\cancel{36}\,12}=\frac{k}{3}+\frac{a^2}{12}-\frac{5}{12}a^2$

$\Leftrightarrow x^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2=\frac{k-a^2}{3}$

- si $k-a^2<0 \Leftrightarrow \underline{k<a^2}$: $E_k=\emptyset$
- si $\underline{k=a^2}$: $E_{a^2}=\{I(0,\frac{\sqrt{3}}{6}a)\}$
- si $\underline{k>a^2}$: $E_k=\mathcal{C}(I,\sqrt{\frac{k-a^2}{3}})$

2) D'après ce qui précède la plus petite valeur de $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$ vaut a^2 et elle est atteinte pour $M=I$.

Or $\overline{IO}=\frac{\sqrt{3}}{6}a=\frac{\overline{CO}}{3}$ et O = milieu $[AB]$ donc I = centre de gravité de ABC.

$\underline{\text{ou}}$: $\overline{IA}^2=(\frac{a}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}a}{6})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}=\frac{a^2}{3}$

$\overline{IB}^2=(-\frac{a}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}a}{6})^2=\frac{a^2}{3}$

$\overline{IC}^2=0^2+(\frac{\sqrt{3}}{6}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2=(-\frac{2}{6}\sqrt{3}a)^2=\frac{1}{9}3a^2=\frac{a^2}{3}$

D'où : $\overline{IA}=\overline{IB}=\overline{IC}$ et I = centre du cercle circonscrit